MÉTHODE A SUIVRE POUR DÉTERMINER LA TOTALITÉ DES NOMBRES PREMIERS COMPRISE ENTRE I ET LE NOMBRE N = 1 x 2 x 3 X 5 x 7 x 11 X ... X p, PRODUIT DES (+ 1) NOMBRES PREMIERS CONSÉCUTIFS PRIS A PARTIR DE 1

MÉTHODE A SUIVRE

POUR

DÉTERMINER LA TOTALITÉ DES NOMBRES PREMIERS COMPRISE ENTRE 1 ET LE NOMBRE $N = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times p$, PRODUIT DES $(\alpha + 1)$ NOMBRES PREMIERS CONSÉCUTIFS PRIS A PARTIR DE 1

PAR

Edouard BARBETTE (Liége).

La totalité des nombres premiers avec N et non supérieurs à N est donnée par l'*indicateur* de N :

$$\varphi(N) = 1 \times 2 \times 4 \times 6 \times 10 \times \ldots \times (p - 1) .$$

Soient $p_1, p_2, p_3, \ldots$ les nombres premiers qui suivent p et soit p_n le plus grand des nombres premiers dont le carré est inférieur à N.

Si q est le nombre premier immédiatement inférieur au quotient de N par p_1 et si nous représentons par β la totalité des nombres inférieurs à N qui sont les produits *distincts* des nombres premiers $p_1, p_2, p_3, \ldots, q$ pris avec répétition de toutes les façons possibles (2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, ...), α étant la quantité de nombres premiers de 2 à p, la totalité des nombres premiers de 1 à N, y compris l'unité, sera donné par $\varphi(N) + \alpha - \beta$. La table des nombres premiers de 1 à q permettra donc de déterminer la totalité des nombres premiers qui existent de 1 à N.

Si $p_n \leqq p$, ce total se réduit à $\varphi(N) + \alpha$.

Nous allons appliquer la méthode qui précède aux premières valeurs de N :

1° $\mathbf{N = 1 \times 2 \times 3 = 6}$. L'indicateur de 6 est $\varphi(6) = 1 \times 2 = 2$.

Puisque $2^2 < 6 < 3^2$, c'est que $p_n = 2 < p$ ou 3.

De 1 à 6, il y a donc $\varphi(N) + \alpha = 2 + 2 = 4$ nombres premiers.

2° $\mathbf{N = 1 \times 2 \times 3 \times 5 = 30}$. L'indicateur de 30 est $\varphi(30) = 1 \times 2 \times 4 = 8$.

Puisque $5^2 < 30 < 6^2$, c'est que $p_n = p$ ou 5.

De 1 à 30, il existe donc $\varphi(N) + \alpha = 8 + 3 = 11$ nombres premiers.

3° $\mathbf{N = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210}$. L'indicateur de 210 est $\varphi(210) = 1 \times 2 \times 4 \times 6 = 48$.

Puisque $14^2 < 210 < 15^2$, c'est que $p_n = 13 > p$ ou 7; calculons β : le nombre premier qui précède le quotient de 210 par 11 étant 19 et le nombre premier qui précède le quotient de 210 par 13 étant 13, les cinq produits

$$11 \times 11\,, \quad 11 \times 13\,, \quad 11 \times 17\,, \quad 11 \times 19\,, \quad 13 \times 13$$

sont les seuls à éliminer.

De 1 à 210, il y a donc $\varphi(N) + \alpha - \beta = 48 + 4 - 5 = 47$ nombres premiers.

4° $\mathbf{N = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310}$. L'indicateur de 2310 est

$$\varphi(2310) = 1 \times 2 \times 4 \times 6 \times 10 = 480\,.$$

Puisque $48^2 < 2310 < 49^2$, c'est que $p_n = 47 > p$ ou 11; calculons β :

Les nombres premiers qui précèdent immédiatement les quotients de 2310 par

$$13\,,\ 17\,,\ 19\,,\ 23\,,\ 29\,,\ 31\,,\ 37\,,\ 41\,,\ 43\,,\ 47$$

étant respectivement

$$173\,,\ 131\,,\ 113\,,\ 97\,,\ 79\,,\ 73\,,\ 61\,,\ 53\,,\ 53\,,\ 47\,,$$

il faudra éliminer les produits de

13	par	13, 17, ..., 173,	au nombre de	35	;
17	»	17, 19, ..., 131,	»	26	;
19	»	19, 23, ..., 113,	»	23	;
23	»	23, 29, ..., 97,	»	17	;
29	»	29, 31, ..., 79,	»	13	;
31	»	31, 37, ..., 73,	»	11	;
37	»	37, 41, ..., 61,	»	7	;
41	»	41, 43, 47, 53,	»	4	;
43	»	43, 47, 53,	»	3	;
47	»	47,	»	1	;

en tout, 140 produits.

Le nombre premier 13 étant le quotient de 2310 par 13^2 ou 169, il ne reste plus à éliminer que le produit $13^2 \times 13$ ou 13^3. Par suite, $\beta = 141$.

De 1 à 2310, il existe donc $\varphi(N) + \alpha - \beta = 480 + 5 - 141 = 344$ nombres premiers.

5° $\mathbf{N = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 30\,030}$. L'indicateur de 30 030 est

$$\varphi(30\,030) = 1 \times 2 \times 4 \times 6 \times 10 \times 12 = 5760 \;.$$

Puisque $173^2 < 30\,030 < 174^2$, c'est que $p_n = 173 > p$ ou 13; calculons β :

Les nombres premiers qui précèdent immédiatement les quotients de 30 030 par

$$17 \;,\; 19 \;,\; 23 \;,\; \ldots \;,\; 173 \;,$$

étant respectivement

$$1759 \;,\; 1579 \;,\; 1303 \;,\; \ldots \;,\; 173 \;,$$

il faudra éliminer les produits de

17	par	17, 19, ..., 1759,	au nombre de	268	;
19	»	19, 23, ..., 1579,	»	242	;
23	»	23, 29, ..., 1303,	»	205	;
29	»	29, 31, ..., 1033,	»	165	;
31	»	31, 37, ..., 967,	»	153	;

37	»	37,	41,	. . . . . . ,	811,	au nombre de	130 ;
41	»	41,	43,	. . . . . . ,	727,	»	117 ;
43	»	43,	47,	. . . . . . ,	691,	»	112 ;
47	»	47,	53,	. . . . . . ,	631,	»	101 ;
53	»	53,	59,	. . . . . . ,	563,	»	88 ;
59	»	59,	61,	. . . . . . ,	503,	»	80 ;
61	»	61,	67,	. . . . . . ,	491,	»	77 ;
67	»	67,	71,	. . . . . . ,	443,	»	68 ;
71	»	71,	73,	. . . . . . ,	421,	»	63 ;
73	»	73,	79,	. . . . . . ,	409,	»	60 ;
79	»	79,	83,	. . . . . . ,	379,	»	54 ;
83	»	83,	89,	. . . . . . ,	359,	»	50 ;
89	»	89,	97,	. . . . . . ,	337,	»	45 ;
97	»	97,	101,	. . . . . . ,	307,	»	39 ;
101	»	101,	103,	. . . . . . ,	293,	»	37 ;
103	»	103,	107,	. . . . . . ,	283,	»	35 ;
107	»	107,	109,	. . . . . . ,	277,	»	32 ;
109	»	109,	113,	. . . . . . ,	271,	»	30 ;
113	»	113,	127,	. . . . . . ,	263,	»	27 ;
127	»	127,	131,	. . . . . . ,	233,	»	21 ;
131	»	131,	137,	. . . . . . ,	229,	»	19 ;
137	»	137,	139,	. . . . . . ,	211,	»	15 ;
139	»	139,	149,	. . . . . . ,	211,	»	14 ;
149	»	149,	151,	. . . . . . ,	199,	»	12 ;
151	»	151,	157,	. . . . . . ,	197,	»	10 ;
157	»	157,	163,	. . . . . . ,	191,	»	7 ;
163	»	163,	167,	. . . . . . ,	181,	»	5 ;
167	»	167,	173,	179,		»	3 ;
173	»	173,				»	1 ;

en tout, 2385 produits.

Les nombres premiers qui précèdent immédiatement les quotients de 30 030 par

$$17^2\ ,\quad 19^2\ ,\quad 23^2\ ,\quad 29^2\ ,\quad 31^2\ ,\quad 37^2\ ,\quad 41^2$$

étant respectivement

$$103\ ,\quad 83\ ,\quad 53\ ,\quad 31\ ,\quad 31\ ,\quad 19\ ,\quad 17\ ,$$

et le quotient de 30 030 par 43^2 étant $16 < 17$, il faut éliminer les produits de

17^2	par	17, 19, . . . ,	103,	au nombre de	21 ;
19^2	»	17, 19, . . . ,	83,	»	17 ;
23^2	»	17, 19, . . . ,	53,	»	10 ;
29^2	»	17, 19, . . . ,	31,	»	5 ;
31^2	»	17, 19, . . . ,	31,	»	5 ;
37^2	»	17, 19,		»	2 ;
41^2	»	17,		»	1 ;

en tout, 61 produits.

Le quotient de 30 030 par 17^3 ou 4913 étant inférieur à 17, il ne reste plus à compter que les produits, inférieurs à 30 030, des nombres premiers 17, 19, 23, ... , pris 3 à 3, sans répétition ; les produits 4 à 4, 5 à 5, ... de ces facteurs dépasseront 30 030 puisque $17^4 = 83\,521 > 30\,030$: les nombres premiers qui précèdent immédiatement les quotients de 30 030 par

$$17 \times 19\ ,\quad 17 \times 23\ ,\quad 17 \times 29\ ,\quad 17 \times 31\ ,\quad 17 \times 37\ ,\quad 17 \times 41\ ;$$
$$19 \times 23\ ,\quad 19 \times 29\ ,\quad 19 \times 31\ ,\quad 19 \times 37\ ;$$
$$23 \times 29\ ,\quad 23 \times 31\ ,$$

étant respectivement

$$89\ ,\ 73\ ,\ 59\ ,\ 53\ ,\ 47\ ,\ 43\ ;\quad 67\ ,\ 53\ ,\ 47\ ,\ 41\ ;\quad 43\ ,\ 41\ ,$$

et les quotients de 30 030 par

$$17 \times 43\ ,\quad 19 \times 41\ ,\quad 23 \times 37\ ,\quad 29 \times 31\ ,$$

étant respectivement

$$41 < 47\ ;\quad 38 < 43\ ,\quad 35 < 41\ ,\quad 33 < 37\ ,$$

il restera à éliminer les produits de

17×19	par	23, 29, ... ,	89,	au nombre de	16 ;
17×23	»	29, 31, ... ,	73,	»	12 ;
17×29	»	31, 37, ... ,	59,	»	7 ;
17×31	»	37, 41, ... ,	53,	»	5 ;
17×37	»	41, 43, 47,		»	3 ;

17×41	»	43,	au nombre de	1 ;
19×23	»	29, 31, ... , 67,	»	10 ;
19×29	»	31, 37, ... , 53,	»	6 ;
19×31	»	37, 41, 43, 47,	»	4 ;
19×37	»	41,	»	1 ;
23×29	»	31, 37, 41, 43,	»	4 ;
23×31	»	37, 41,	»	2 ;

en tout, 71 produits.

Par suite, $\beta = 2385 + 61 + 71 = 2517$; de 1 à 30030, il y a donc $\varphi(N) + \alpha - \beta = 5760 + 6 - 2517 = 3249$ nombres premiers.

Liége, 1920.

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f[\varphi_1(t)] = f[\varphi_2(t)]$

PAR

Rolin WAVRE (Neuchâtel).

A la quinzième réunion[1] de la Société mathématique suisse, tenue à Neuchâtel le 31 août 1920, M. le Prof. PLANCHEREL a posé la question d'analyse suivante :

« Soit $y = f(x)$ une courbe continue et univoque dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, telle que dans cet intervalle $f(x) \geqq 0$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Soient M_1, M_2, deux points mobiles sur cette courbe, assujettis à avoir à chaque instant t les mêmes ordonnées. A l'instant $t = 0$, M_1 se trouve au point (a, o), M_2 au point (b, o). Peut-on coordonner les mouvements de ces deux points de manière à ce qu'ils se rencontrent? »

M. Plancherel ajoute :

« Le problème est équivalent à la détermination de deux fonc-

[1] Voir *L'Enseignement mathématique*, Nos 3-4, t. XXI, p. 226-227; 1920.