

# SUR L'ÉLIMINATION ALGÈBRIQUE

Autor(en): **Riquier, Ch.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515711>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR L'ÉLIMINATION ALGÈBRIQUE

PAR

Ch. RIQUIER (Caen).

## DEUXIÈME PARTIE<sup>1</sup>.

Conditions pour que  $n$  équations algébriques à l'inconnue  $x$  admettent quelque racine commune.

7. — Nous commencerons par établir deux lemmes.

LEMME PREMIER. *Considérons les  $n$  équations algébriques, à l'inconnue  $x$ ,*

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= A_0 x^a + A_1 x^{a-1} + \dots + A_{a-1} x + A_a = 0 , \\ B(x) &= B_0 x^b + B_1 x^{b-1} + \dots + B_{b-1} x + B_b = 0 , \\ C(x) &= C_0 x^c + C_1 x^{c-1} + \dots + C_{c-1} x + C_c = 0 , \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ L(x) &= L_0 x^l + L_1 x^{l-1} + \dots + L_{l-1} x + L_l = 0 , \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

*dont les degrés (apparents),  $a, b, c, \dots, l$ , sont tous supérieurs à zéro; on notera, au sujet de l'écriture adoptée pour ces équations, que, dans le terme général de chacune d'elles, l'indice du coefficient et l'exposant de  $x$  ont pour somme le degré (apparent) de l'équation. Supposons maintenant que l'une au moins d'entre elles, par exemple la première,  $A(x) = 0$ , n'ait pas tous ses coefficients nuls; puis formons, avec les  $n - 1$  dernières, la combinaison*

$$\lambda B(x) + \mu C(x) + \dots + \omega L(x) = 0 ,$$

où

$$\lambda, \mu, \dots, \omega \quad (15)$$

désignent  $n - 1$  indéterminées.

<sup>1</sup> Voir *L'Enseign. mathém.*, t. XX, n° 6, p. 405-421.

Cela étant, *pour que les  $n$  équations (14) admettent quelque racine commune, il faut et il suffit que, pour toutes valeurs des indéterminées (15), les deux équations*

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= 0, \\ \lambda B(x) + \mu C(x) + \dots + \omega L(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

*admettent quelque racine commune.*

La condition est évidemment nécessaire, et nous avons à prouver qu'elle est suffisante.

I. Considérons un polynôme entier dépendant de variables  $u, v, \dots$  en nombre quelconque, et, dans les plans de notation graphique de ces variables, décrivons, autour des valeurs particulières  $u_0, v_0, \dots$ , prises comme centres, un système de cercles. *Quelque petits que l'on suppose ces cercles, pour que, à leur intérieur, le polynôme prenne la valeur zéro indépendamment des valeurs attribuées aux variables  $u, v, \dots$ , il faut et il suffit que ses coefficients soient tous nuls.*

La condition formulée est évidemment suffisante, et il nous reste à établir qu'elle est nécessaire.

Or, elle l'est évidemment quand il s'agit d'un polynôme entier à une seule variable : car, si le polynôme n'avait pas tous ses coefficients nuls, il ne pourrait prendre la valeur zéro que pour un nombre essentiellement limité de valeurs de cette variable (n° 1). Il suffit alors de prouver que si la condition formulée est nécessaire dans le cas d'un polynôme entier à  $q - 1$  variables, elle l'est encore dans le cas d'un polynôme entier,  $F(u, v, \dots)$ , dépendant des  $q$  variables  $u, v, \dots$

A cet effet, ordonnons le polynôme  $F(u, v, \dots)$  par rapport à  $u$ , et mettons-le sous la forme

$$f_0(v, \dots) + f_1(v, \dots)u + f_2(v, \dots)u^2 + \dots, \quad (17)$$

où

$$f_0(v, \dots), f_1(v, \dots), f_2(v, \dots), \dots \quad (18)$$

sont des polynômes entiers (en nombre limité) dépendant des  $q - 1$  variables  $v, \dots$ . Si, à l'intérieur du système de cercles considéré, on attribue à  $v, \dots$  un système déterminé

de valeurs particulières, l'expression (17) s'évanouit quel que soit  $u$ , et l'on a dès lors

$$f_0(v, \dots) = 0, \quad f_1(v, \dots) = 0, \quad f_2(v, \dots) = 0, \quad \dots$$

Mais, les valeurs particulières que nous venons d'attribuer à  $v, \dots$  étant, dans les limites imposées, complètement arbitraires, il résulte de ce qui est admis sur les polynômes entiers à  $q - 1$  variables que les coefficients des divers polynômes (18) sont tous nuls, et, par suite, ceux du polynôme  $F(u, v, \dots)$ .

II. *Etant donné un nombre quelconque de polynômes entiers, dépendant d'un nombre quelconque de variables, et dont aucun n'a tous ses coefficients nuls, il existe quelque système de valeurs de ces variables n'annulant aucun des polynômes.*

A. *Lorsqu'un polynôme entier,  $F(u, v, \dots)$ , à un nombre quelconque de variables, prend une valeur différente de zéro pour un système déterminé,  $(u_0, v_0, \dots)$ , de valeurs particulières de ces variables, il reste différent de zéro pour toutes valeurs de  $u, v, \dots$  suffisamment voisines de  $u_0, v_0, \dots$*

Effectivement, si l'on désigne par  $M_0$  le module (non nul) de  $F(u_0, v_0, \dots)$ , et par  $\mu$  une quantité positive ( $> 0$ ) choisie comme on voudra au dessous de  $M_0$ , il résulte de la continuité de  $F(u, v, \dots)$  que, pour toutes valeurs de  $u, v, \dots$  suffisamment voisines de  $u_0, v_0, \dots$ , on aura

$$\text{mod } [F(u, v, \dots) - F(u_0, v_0, \dots)] < M_0 - \mu,$$

et à plus forte raison

$$M_0 - \text{mod } F(u, v, \dots) < M_0 - \mu,$$

c'est-à-dire

$$\text{mod } F(u, v, \dots) > \mu.$$

B. Revenons à l'énoncé formulé au début du présent alinéa II.

Lorsque le nombre des polynômes se réduit à 1, la propriété qu'il s'agit d'établir résulte immédiatement de l'alinéa I; pour prouver qu'elle est générale, il suffit donc de

montrer qu'en la supposant vraie pour  $p - 1$  polynômes, elle l'est nécessairement aussi pour les  $p$  polynômes

$$Q(u, v, \dots), \dots, R(u, v, \dots), S(u, v, \dots),$$

dépendant de variables  $u, v, \dots$  en nombre quelconque. Or, aucun de ces  $p$  polynômes, et, notamment, des  $p - 1$  premiers, n'ayant, par hypothèse, tous ses coefficients nuls, on peut, en vertu de ce qui est admis, assigner quelque système de valeurs,  $(u_0, v_0, \dots)$ , tel que les  $p - 1$  polynômes

$$Q(u, v, \dots), \dots, R(u, v, \dots)$$

soient tous différents de zéro pour

$$u, v, \dots = u_0, v_0, \dots,$$

et par suite (lemme A) pour toutes valeurs de  $u, v, \dots$  suffisamment voisines de  $u_0, v_0, \dots$ . Cela étant, si l'on a  $S(u_0, v_0, \dots) \neq 0$ , le système de valeurs  $(u_0, v_0, \dots)$  satisfait à toutes les conditions requises. Si l'on a au contraire  $S(u_0, v_0, \dots) = 0$ , il existe certainement, dans un voisinage aussi rapproché qu'on le voudra de  $(u_0, v_0, \dots)$ , et par suite dans un domaine où aucun des  $p - 1$  premiers polynômes ne peut s'annuler, quelque système de valeurs,  $(u_1, v_1, \dots)$ , n'annulant pas  $S(u, v, \dots)$  : car, sinon, le polynôme  $S(u, v, \dots)$  aurait, en vertu de I, tous ses coefficients nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse ; pour les valeurs  $u_1, v_1, \dots$ , on aura donc à la fois

$$Q(u_1, v_1, \dots) \neq 0, \dots, R(u_1, v_1, \dots) \neq 0, S(u_1, v_1, \dots) \neq 0.$$

III. *Il existe, pour les  $n - 1$  indéterminées (15), une infinité de systèmes de valeurs,*

$$\left. \begin{array}{l} \lambda', \mu', \dots, \omega', \\ \lambda'', \mu'', \dots, \omega'', \\ \lambda''', \mu''', \dots, \omega''', \\ \dots \dots \dots, \\ \dots \dots \dots, \\ \dots \dots \dots, \end{array} \right\} \quad (19)$$

*tels que, dans le tableau (19), qui contient  $n - 1$  colonnes et*

une infinité de lignes,  $n - 1$  lignes arbitrairement choisies forment un déterminant différent de zéro.

Effectivement, à une première ligne,  $\lambda', \mu', \dots, \omega'$ , composée de  $n - 1$  éléments arbitrairement choisis sous la seule restriction de n'être pas tous nuls, on peut, par l'application de l'alinéa II à un polynôme linéaire et homogène dépendant de deux variables, adjoindre une deuxième ligne,  $\lambda'', \mu'', \dots, \omega''$ , telle que le tableau résultant,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda', \mu', \dots, \omega', \\ \lambda'', \mu'', \dots, \omega'', \end{array} \right\}$$

à  $n - 1$  colonnes et deux lignes, contienne quelque déterminant du second ordre différent de zéro; puis, par l'application de l'alinéa II à un polynôme linéaire et homogène dépendant de trois variables, adjoindre à ce dernier tableau une troisième ligne,  $\lambda''', \mu''', \dots, \omega'''$ , telle que le tableau résultant,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda', \mu', \dots, \omega', \\ \lambda'', \mu'', \dots, \omega'', \\ \lambda''', \mu''', \dots, \omega''', \end{array} \right\}$$

à  $n - 1$  colonnes et trois lignes, contienne quelque déterminant du troisième ordre différent de zéro; et ainsi jusqu'à ce que, par l'application de l'alinéa II à un polynôme linéaire et homogène dépendant de  $n - 1$  variables, on ait obtenu un tableau carré,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda', \mu', \dots, \omega', \\ \lambda'', \mu'', \dots, \omega'', \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \\ \lambda^{(n-2)}, \mu^{(n-2)}, \dots, \omega^{(n-2)}, \\ \lambda^{(n-1)}, \mu^{(n-1)}, \dots, \omega^{(n-1)}, \end{array} \right\} \quad (20)$$

formant un déterminant d'ordre  $n - 1$  différent de zéro: il est alors manifeste que, dans le tableau (20), toute association de  $n - 2$  lignes contient quelque déterminant d'ordre  $n - 2$  différent de zéro.

Cela étant, on pourra, par l'application de l'alinéa II à plusieurs polynômes linéaires et homogènes dépendant de

$n - 1$  variables, adjoindre au tableau (20) une ligne,

$$\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}, \dots, \omega^{(n)},$$

telle que, dans le tableau résultant,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda', \mu', \dots, \omega', \\ \lambda'', \mu'', \dots, \omega'', \\ \dots, \\ \lambda^{(n-2)}, \mu^{(n-2)}, \dots, \omega^{(n-2)}, \\ \lambda^{(n-1)}, \mu^{(n-1)}, \dots, \omega^{(n-1)}, \\ \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}, \dots, \omega^{(n)}, \end{array} \right\} \quad (21)$$

à  $n - 1$  colonnes et  $n$  lignes, toute association de  $n - 1$  lignes forme un déterminant différent de zéro : il est alors manifeste que, dans le tableau (21), toute association de  $n - 2$  lignes contient quelque déterminant d'ordre  $n - 2$  différent de zéro.

Par une nouvelle application de l'alinéa II à plusieurs polynômes linéaires et homogènes dépendant de  $n - 1$  variables, on pourra maintenant adjoindre au tableau (21) une ligne,

$$\lambda^{(n+1)}, \mu^{(n+1)}, \dots, \omega^{(n+1)},$$

telle que, dans le tableau résultant,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda', \mu', \dots, \omega', \\ \lambda'', \mu'', \dots, \omega'', \\ \dots, \\ \lambda^{(n-2)}, \mu^{(n-2)}, \dots, \omega^{(n-2)}, \\ \lambda^{(n-1)}, \mu^{(n-1)}, \dots, \omega^{(n-1)}, \\ \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}, \dots, \omega^{(n)}, \\ \lambda^{(n+1)}, \mu^{(n+1)}, \dots, \omega^{(n+1)}, \end{array} \right\} \quad (22)$$

à  $n - 1$  colonnes et  $n + 1$  lignes, toute association de  $n - 1$  lignes forme un déterminant d'ordre  $n - 1$  différent de zéro : il est alors manifeste que, dans le tableau (22), toute association de  $n - 2$  lignes contient quelque déterminant d'ordre  $n - 2$  différent de zéro.

Par une nouvelle application de l'alinéa II, on pourra de même, etc.

Ce mode de raisonnement peut, comme on le voit, être indéfiniment poursuivi.

IV. Revenons à notre énoncé général, et supposons que, pour toutes valeurs des  $n - 1$  indéterminées (15), les deux équations (16) admettent quelque racine commune : il s'agit d'établir que les  $n$  équations (14) admettent nécessairement quelque racine commune.

En effet, puisque, pour toutes valeurs de  $\lambda, \mu, \dots, \omega$ , les deux équations (16) admettent quelque racine commune, et que, d'autre part, l'équation  $A(x) = 0$  n'a pas tous ses coefficients nuls, cette dernière admet un nombre,  $m$ , de racines distinctes supérieur à zéro et au plus égal à  $a$ , et ces  $m$  racines sont, naturellement, indépendantes des valeurs attribuées aux indéterminées (15). Si, dans le tableau illimité (19), on considère  $(n - 2)m + 1$  lignes quelconques, par exemple les  $(n - 2)m + 1$  premières, il y aura, pour chacun des  $(n - 2)m + 1$  couples d'équations

$$\left. \begin{aligned} A(x) = 0, \quad \lambda' B(x) + \mu' C(x) + \dots + \omega' L(x) = 0 ; \\ A(x) = 0, \quad \lambda'' B(x) + \mu'' C(x) + \dots + \omega'' L(x) = 0 ; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ; \\ A(x) = 0, \quad \lambda^{[(n-2)m+1]} B(x) + \mu^{[(n-2)m+1]} C(x) + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + \omega^{[(n-2)m+1]} L(x) = 0, \end{aligned} \right\}$$

quelque racine commune aux deux équations du couple. D'ailleurs, l'équation  $A(x) = 0$  ayant exactement  $m$  racines distinctes, il y aura, parmi ces  $(n - 2)m + 1$  couples d'équations,  $n - 1$  couples au moins pour lesquels la racine commune coïncidera avec une même racine,  $x = \xi$ , de l'équation  $A(x) = 0$ ; en désignant donc par

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \dots & \omega_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \dots & \omega_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n-1} & \mu_{n-1} & \dots & \omega_{n-1} \end{vmatrix}$$

un certain déterminant d'ordre  $n - 1$  extrait du tableau (19), par suite différent de zéro, et par  $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_{n-1}(x)$





la racine commune  $(x, y) = (x', y')$ , où  $x', y'$  désignent des valeurs numériques non à la fois nulles. On voit tout d'abord que la valeur numérique  $y'$  ne peut être nulle : car, si elle l'était,  $x'$  serait différent de zéro, et la première équation (24) donnerait  $H_0 x'^h = 0$ , ce qui est impossible à cause de  $H_0 \neq 0$ . Notre hypothèse relative aux équations (24) et à leur racine commune peut donc se formuler en disant que ces équations sont toutes vérifiées pour  $x = \frac{x'}{y'}$ ,  $y = 1$ , ce qui revient à dire que les équations (23) sont toutes vérifiées pour  $x = \frac{x'}{y'}$ .

9. — Considérons maintenant  $n$  équations algébriques à l'inconnue  $x$ , par exemple les  $n$  équations (14), dont les degrés (apparents) respectifs,  $a, b, \dots, l$ , soient tous supérieurs à zéro, et proposons-nous de rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces  $n$  équations admettent quelque racine commune. Dans cette recherche, nous examinerons d'abord le cas de deux équations ; nous ferons voir ensuite que le cas de  $n$  équations ( $n > 2$ ) se ramène à celui de  $n - 1$  équations.

I. Pour que l'équation algébrique à l'inconnue  $x$ ,

$$A(x) = A_0 x^a + A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} + \dots + A_{a-1} x + A_a = 0,$$

dont le degré (apparent)  $a$  est supérieur à zéro, admette quelque racine, il faut et il suffit :

Ou bien que ses coefficients soient tous nuls ;

Ou bien que l'on ait  $A_0 \neq 0$  ;

Ou bien que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 \neq 0$  ;

Ou bien que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 \neq 0$  ; Etc. ;

Ou bien, enfin, que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_{a-2} = 0, A_{a-1} \neq 0$ .

Par exemple : Pour que l'équation

$$A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0$$

admette quelque racine, il faut et il suffit : ou bien que ses coefficients,  $A_0, A_1, A_2$ , soient tous nuls ; ou bien que l'on ait  $A_0 \neq 0$  ; ou bien, enfin, que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 \neq 0$ .

Pour que l'équation

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$

admette quelque racine, il faut et il suffit : ou bien que ses coefficients,  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , soient tous nuls ; ou bien que l'on ait  $A_0 \neq 0$  ; ou bien que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 \neq 0$  ; ou bien, enfin, que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 \neq 0$ .

II. *Pour que les deux équations algébriques à l'inconnue  $x$ ,*

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= A_0 x^a + A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} + \dots + A_{a-1} x + A_a = 0, \\ B(x) &= B_0 x^b + B_1 x^{b-1} + B_2 x^{b-2} + \dots + B_{b-1} x + B_b = 0, \end{aligned} \right\}$$

*dont les degrés (apparents)  $a, b$  sont tous deux supérieurs à zéro, admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :*

*Ou bien que, la première ayant tous ses coefficients nuls, la deuxième admette quelque racine (I) ;*

*Ou bien que l'on ait  $A_0 \neq 0$ , et que les deux formes binaires*

$$\left. \begin{aligned} A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \dots + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a, \\ B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b \end{aligned} \right\}$$

*aient un résultant nul ;*

*Ou bien que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 \neq 0$ , et que les deux formes binaires*

$$\left. \begin{aligned} A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} y + \dots + A_{a-1} x y^{a-2} + A_a y^{a-1}, \\ B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b \end{aligned} \right\}$$

*aient un résultant nul ;*

*Ou bien que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 \neq 0$ , et que les deux formes binaires*

$$\left. \begin{aligned} A_2 x^{a-2} + \dots + A_{a-1} x y^{a-3} + A_a y^{a-2}, \\ B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b \end{aligned} \right\}$$

*aient un résultant nul ; — Etc. ;*

*Ou bien, enfin, que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_{a-2} = 0, A_{a-1} \neq 0$ , et que les deux formes binaires*

$$\left. \begin{aligned} A_{a-1} x + A_a y, \\ B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b \end{aligned} \right\}$$

*aient un résultant nul.*

Le simple rapprochement des n<sup>os</sup> 8 (LEMME SECOND) et 3 suffit à mettre en évidence l'exactitude de cet énoncé.

III. Supposons actuellement  $n$  quelconque ( $> 2$ ), et cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les  $n$  équations (14) admettent quelque racine commune.

Notre proposition du n° 7 (LEMME PREMIER) entraîne tout d'abord la conséquence suivante :

*Pour que les  $n$  équations (14) [dont les degrés apparents  $a, b, \dots, l$  sont supérieurs à zéro] admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :*

*Ou bien que, la première,  $A(x) = 0$ , ayant tous ses coefficients nuls, les  $n - 1$  équations restantes,*

$$B(x) = 0, \quad C(x) = 0, \quad \dots, \quad L(x) = 0,$$

*admettent quelque racine commune ;*

*Ou bien que, la première n'ayant pas tous ses coefficients nuls, les deux équations*

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= 0, \\ \lambda B(x) + \mu C(x) + \dots + \omega L(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

*admettent, pour toutes valeurs de  $\lambda, \mu, \dots, \omega$ , quelque racine commune.*

Cela étant, désignons par  $\Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega)$  ce que devient le premier membre,

$$\lambda B(x) + \mu C(x) + \dots + \omega L(x),$$

de la dernière équation écrite, lorsqu'on lui donne la forme homogène par l'introduction d'une variable auxiliaire  $y$ ; autrement dit, et en supposant, ce qui est évidemment permis, que le degré  $b$  ne soit inférieur à aucun des degrés  $c, \dots, l$ , posons

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega) &= \\ &= \lambda [B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b] \\ &+ \mu [C_0 x^c y^{b-c} + C_1 x^{c-1} y^{b-c+1} + \dots + C_{c-1} x y^{b-1} + C_c y^b] \\ &+ \dots \\ &+ \omega [L_0 x^l y^{b-l} + L_1 x^{l-1} y^{b-l+1} + \dots + L_{l-1} x y^{b-1} + L_l y^b]. \end{aligned}$$

En vertu de l'alinéa précédent, II, *pour que, l'équation  $A(x) = 0$  n'ayant pas tous ses coefficients nuls, les deux*

équations (25) admettent, pour toutes valeurs de  $\lambda, \mu, \dots, \omega$ , quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que l'on ait  $A_0 \neq 0$ , et que le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \dots + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned} \right\}$$

aux indéterminées  $x, y$ , qui est lui-même une forme de degré  $a$  aux  $n - 1$  indéterminées  $\lambda, \mu, \dots, \omega$ , s'annule pour toutes valeurs de ces dernières, c'est-à-dire (n° 7, I) ait tous ses coefficients nuls ;

Ou bien que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 \neq 0$ , et que le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} y + \dots + A_{a-1} x y^{a-2} + A_a y^{a-1}, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned} \right\}$$

aux indéterminées  $x, y$ , qui est lui-même une forme de degré  $a - 1$  en  $\lambda, \mu, \dots, \omega$ , ait tous ses coefficients nuls ;

Ou bien que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 \neq 0$ , et que le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_2 x^{a-2} + \dots + A_{a-1} x y^{a-3} + A_a y^{a-2}, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned} \right\}$$

aux indéterminées  $x, y$ , qui est lui-même une forme de degré  $a - 2$  en  $\lambda, \mu, \dots, \omega$ , ait tous ses coefficients nuls ; — Etc. ;

Ou bien, enfin, que l'on ait  $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_{a-2} = 0, A_{a-1} \neq 0$ , et que le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_{a-1} x + A_a y, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned} \right\}$$

aux indéterminées  $x, y$ , qui est lui-même une forme linéaire en  $\lambda, \mu, \dots, \omega$ , ait tous ses coefficients nuls.

La recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de quelque racine commune à  $n$  équations données se ramène donc bien, comme nous l'avions annoncé, à une recherche semblable effectuée dans le cas de  $n - 1$  équations.

tions; et, comme elle a été résolue plus haut (II) pour le cas de deux équations, elle pourra l'être, de proche en proche, pour des équations en nombre quelconque.

10. — Il nous reste à établir une intéressante propriété des relations obtenues par l'élimination de  $x$  entre les  $n$  équations (14); ces relations sont, comme nous allons le voir: 1° homogènes par rapport aux coefficients de chacune des  $n$  équations (14), envisagée séparément; 2° isobares par rapport à l'ensemble des coefficients de ces  $n$  équations, c'est-à-dire qu'en adoptant pour ces équations l'écriture spécifiée au début du n° 7, la somme des indices des divers facteurs  $A, B, C, \dots, L$ , évaluée tour à tour dans les divers termes d'une relation déterminée provenant de l'élimination, garde une valeur constante.

Lorsqu'on suppose  $n = 2$ , cette propriété s'aperçoit sans peine: il suffit, en pareil cas, pour se convaincre de son exactitude, de se reporter, d'une part, à nos énoncés des nos 4 et 5, d'autre part, à l'alinéa II du numéro précédent 9. Pour l'étendre au cas général où  $n$  est quelconque, nous avons donc à prouver qu'en la supposant vraie dans le cas de  $n - 1$  équations, elle l'est nécessairement encore dans le cas des  $n$  équations (14). Finalement, si l'on se reporte à l'alinéa III du n° 9, dont nous adopterons les notations, on se trouve ramené à prouver successivement:

1° Qu'en ordonnant par rapport à  $\lambda, \mu, \dots, \omega$  le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \dots + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned} \right\} (26)$$

tous les coefficients de l'expression obtenue jouissent de la double propriété dont il s'agit;

2° Qu'en ordonnant par rapport à  $\lambda, \mu, \dots, \omega$  le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} y + \dots + A_{a-1} x y^{a-2} + A_a y^{a-1}, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned} \right\} (27)$$

tous les coefficients de l'expression obtenue en jouissent également ;

3° Qu'en ordonnant par rapport à  $\lambda, \mu, \dots, \omega$  le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} & A_2 x^{a-2} + \dots + A_{a-1} x y^{a-3} + A_a y^{a-2} , \\ & \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega) , \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

tous les coefficients de l'expression obtenue en jouissent à leur tour ; — Etc.

Nous nous bornerons à exposer cette démonstration pour 1° et 2°, et le lecteur en apercevra sans peine la généralité.

I. Considérant actuellement les deux formes (26), nous adopterons pour la deuxième,  $\Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega)$ , le changement de notations suivant. Le degré  $b$  étant supposé, comme à l'alinéa III du n° 9, n'être inférieur à aucun des degrés  $c, \dots, l$  (ce qui est évidemment permis), nous désignerons provisoirement les coefficients

$$\begin{aligned} & C_0, C_1, \dots, C_{c-1}, C_c , \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots , \\ & L_0, L_1, \dots, L_{l-1}, L_l \end{aligned}$$

par les notations respectives

$$\begin{aligned} & C'_{b-c}, C'_{b-c+1}, \dots, C'_{b-1}, C'_b , \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots , \\ & L'_{b-l}, L'_{b-l+1}, \dots, L'_{b-1}, L'_b , \end{aligned}$$

où les indices des coefficients C se trouvent tous augmentés d'un même entier,  $b - c$ , etc., ..., ceux des coefficients L d'un même entier,  $b - l$ . Alors l'écriture de la forme  $\Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega)$  devient

$$\begin{aligned} & \Upsilon(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega) = \\ & = \lambda [B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b] \\ & + \mu [C'_{b-c} x^c y^{b-c} + C'_{b-c+1} x^{c-1} y^{b-c+1} + \dots + C'_{b-1} x y^{b-1} + C'_b y^b] \\ & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + \omega [L'_{b-l} x^l y^{b-l} + L'_{b-l+1} x^{l-1} y^{b-l+1} + \dots + L'_{b-1} x y^{b-1} + L'_b y^b] , \end{aligned}$$

et l'on voit que l'indice de la lettre B', ou C', ..., ou L' qui figure maintenant dans chaque terme se trouve être égal à l'exposant de la puissance de y dans le même terme. Si donc on ordonne par rapport à x et y la forme Y(x, y, λ, μ, ..., ω), il suit de ce que nous avons vu au n° 4 que le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \dots + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a, \\ Y(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega) \end{aligned} \right\}$$

est : 1° homogène par rapport aux quantités

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{a-1}, A_a ; \quad (29)$$

2° homogène par rapport aux expressions

$$\left. \begin{aligned} \lambda B_0 + \mu C'_0 + \dots + \omega L'_0, \\ \lambda B_1 + \mu C'_1 + \dots + \omega L'_1, \\ \dots \dots \dots \\ \lambda B_b + \mu C'_b + \dots + \omega L'_b ; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

3° isobare par rapport à l'ensemble des quantités (29) et des expressions (30), celles-ci, (30), étant mentalement affectées : la première, de l'indice zéro, commun aux quantités B<sub>0</sub>, C'<sub>0</sub>, ..., L'<sub>0</sub>, qui y figurent ; la deuxième, de l'indice 1, commun aux quantités B<sub>1</sub>, C'<sub>1</sub>, ..., L'<sub>1</sub> ; etc. ; la dernière de l'indice b, commun aux quantités B<sub>b</sub>, C'<sub>b</sub>, ..., L'<sub>b</sub>.

Si l'on ordonne maintenant ce résultant par rapport à λ, μ, ..., ω, il est aisé de voir que chacun des coefficients sera : 1° homogène par rapport aux quantités figurant dans une seule quelconque des lignes du tableau

$$\left. \begin{aligned} A_0, A_1, A_2, \dots, A_{a-1}, A_a, \\ B_0, B_1, B_2, \dots, B_{b-1}, B_b, \\ C'_0, C'_1, C'_2, \dots, C'_{b-1}, C'_b, \\ \dots \dots \dots \\ L'_0, L'_1, L'_2, \dots, L'_{b-1}, L'_b ; \end{aligned} \right\}$$





Cela étant, il suit de ce que nous avons vu au n° 4 que le résultant des deux formes

$$A'_0 x^{a-1} + A'_1 x^{a-2} y + \dots + A'_{a-2} x y^{a-2} + A'_{a-1} y^{a-1}, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \\ \Upsilon(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega)$$

est : 1° homogène par rapport aux quantités

$$A'_0, A'_1, \dots, A'_{a-2}, A'_{a-1}; \quad (31)$$

2° homogène par rapport aux expressions (30); 3° isobare par rapport à l'ensemble des quantités (31) et des expressions (30), ces dernières, (30), étant mentalement affectées, comme ci-dessus (I), des indices respectifs 0, 1, ..., b.

Si l'on ordonne maintenant ce résultant par rapport à  $\lambda, \mu, \dots, \omega$ , il est très facile d'apercevoir que chacun des coefficients sera : 1° homogène par rapport aux quantités figurant dans une seule quelconque des lignes du tableau

$$\left. \begin{array}{l} A'_0, A'_1, \dots, A'_{a-2}, A'_{a-1}, \\ B_0, B_1, \dots, B_{b-1}, B_b, \\ C'_0, C'_1, \dots, C'_{b-1}, C'_b, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \\ L'_0, L'_1, \dots, L'_{b-1}, L'_b; \end{array} \right\}$$

2° isobare par rapport à l'ensemble des quantités figurant dans ce tableau.

Finalement, si l'on revient aux notations primitives en remplaçant les lettres  $A', C', \dots, L'$  par leurs valeurs en fonction des lettres  $A, C, \dots, L$ , chacun des coefficients que nous venons de considérer deviendra : 1° homogène par rapport aux quantités figurant dans une seule quelconque des lignes du nouveau tableau

$$\left. \begin{array}{l} A_1, \dots, A_{a-1}, A_a, \\ B_0, B_1, \dots, B_{b-1}, B_b, \\ C_0, C_1, \dots, C_{b-1}, C_b, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \\ L_0, L_1, \dots, L_{b-1}, L_b; \end{array} \right\}$$

2° isobare par rapport à l'ensemble des quantités figurant dans ce nouveau tableau.

III. Chacun des cas successivement énumérés au début du présent numéro 10 se traiterait, comme nous l'avons dit, de la même manière que les deux premiers, examinés ci-dessus.

11. — Exemples d'élimination.

I. Pour que les deux équations du second degré

$$\left. \begin{aligned} A_0 x^2 + A_1 x + A_2 &= 0, \\ B_0 x^2 + B_1 x + B_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

à l'inconnue  $x$ , admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que, les coefficients,  $A_0, A_1, A_2$ , de la première équation étant tous nuls, la deuxième admette quelque racine (n° 9, I) ;

Ou bien que,  $A_0$  étant différent de zéro, le résultant des deux formes quadratiques

$$\left. \begin{aligned} A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2, \\ B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2 \end{aligned} \right\}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 6, II)

$$(A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) = 0 ;$$

Ou bien, enfin, que,  $A_0$  étant nul et  $A_1$  différent de zéro, le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + A_2 y, \\ B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2 \end{aligned} \right\}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 6, I)

$$B_2 A_1^2 - A_2 (A_1 B_1 - A_2 B_0) = 0 .$$

II. Pour que les deux équations

$$\left. \begin{aligned} A_0 x^2 + 2A_1 x + A_2 &= 0, \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 + 3B_2 x + B_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

à l'inconnue  $x$ , admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que, les coefficients,  $A_0, A_1, A_2$ , de la première équation étant tous nuls, la deuxième admette quelque racine ;

Ou bien que,  $A_0$  étant différent de zéro, le résultant des deux formes

$$\left. \begin{array}{l} A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2 , \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3 \end{array} \right\}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 6, IV)

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & B_0 & 0 \\ 2A_1 & A_0 & 0 & 3B_1 & B_0 \\ A_2 & 2A_1 & A_0 & 3B_2 & 3B_1 \\ 0 & A_2 & 2A_1 & B_3 & 3B_2 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & B_3 \end{vmatrix} = 0 ;$$

Ou bien, enfin, que,  $A_0$  étant nul et  $A_1$  différent de zéro, le résultant des deux formes

$$\left. \begin{array}{l} 2A_1 x + A_2 y , \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3 \end{array} \right\}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 6, III)

$$\begin{vmatrix} 2A_1 & 0 & 0 & B_0 \\ A_2 & 2A_1 & 0 & 3B_1 \\ 0 & A_2 & 2A_1 & 3B_2 \\ 0 & 0 & A_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

III. Pour que les trois équations du second degré

$$\left. \begin{array}{l} A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0 , \\ B_0 x^2 + B_1 x + B_2 = 0 , \\ C_0 x^2 + C_1 x + C_2 = 0 , \end{array} \right\}$$

à l'inconnue  $x$ , admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que, les coefficients,  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ , des deux premières équations étant tous nuls, la troisième admette quelque racine ;

Ou bien que,  $A_0, A_1, A_2$  étant nuls et  $B_0$  différent de zéro, le résultant des deux formes quadratiques

$$\left. \begin{array}{l} B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2, \\ C_0 x^2 + C_1 xy + C_2 y^2 \end{array} \right\}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 6, II)

$$(B_0 C_2 - C_0 B_2)^2 - (B_0 C_1 - C_0 B_1)(B_1 C_2 - C_1 B_2) = 0 ;$$

Ou bien que,  $A_0, A_1, A_2, B_0$  étant nuls et  $B_1$  différent de zéro, le résultant des deux formes

$$\left. \begin{array}{l} B_1 x + B_2 y, \\ C_0 x^2 + C_1 xy + C_2 y^2 \end{array} \right\}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 6, I)

$$C_2 B_1^2 - B_2(B_1 C_1 - B_2 C_0) = 0 ;$$

Ou bien que,  $A_0$  étant différent de zéro, le résultant des deux formes

$$\left. \begin{array}{l} A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2, \\ (\lambda B_0 + \mu C_0)x^2 + (\lambda B_1 + \mu C_1)xy + (\lambda B_2 + \mu C_2)y^2 \end{array} \right\}$$

soit égal à zéro quels que soient  $\lambda, \mu$  (n° 9, III), c'est-à-dire que l'on ait (n° 6, II), quels que soient  $\lambda, \mu$ ,

$$\begin{aligned} & [A_0(\lambda B_2 + \mu C_2) - A_2(\lambda B_0 + \mu C_0)]^2 \\ & - [A_0(\lambda B_1 + \mu C_1) - A_1(\lambda B_0 + \mu C_0)][A_1(\lambda B_2 + \mu C_2) - A_2(\lambda B_1 + \mu C_1)] = 0, \end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$  les quantités contenues dans les divers crochets,

$$\begin{aligned} & [\lambda(A_0 B_2 - B_0 A_2) + \mu(A_0 C_2 - C_0 A_2)]^2 \\ & - [\lambda(A_0 B_1 - B_0 A_1) + \mu(A_0 C_1 - C_0 A_1)] \\ & \quad [\lambda(A_1 B_2 - B_1 A_2) + \mu(A_1 C_2 - C_1 A_2)] = 0, \end{aligned}$$

ou, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de  $\lambda, \mu$ ,

$$\begin{aligned} & (A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) = 0, \\ & 2(A_0 B_2 - B_0 A_2)(A_0 C_2 - C_0 A_2) - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 C_2 - C_1 A_2) \\ & \quad - (A_0 C_1 - C_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) = 0, \\ & (A_0 C_2 - C_0 A_2)^2 - (A_0 C_1 - C_0 A_1)(A_1 C_2 - C_1 A_2) = 0 ; \end{aligned}$$

Ou bien, enfin, que,  $A_0$  étant nul et  $A_1$  différent de zéro, le résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} & A_1 x + A_2 y, \\ & (\lambda B_0 + \mu C_0)x^2 + (\lambda B_1 + \mu C_1)xy + (\lambda B_2 + \mu C_2)y^2 \end{aligned} \right\}$$

soit égal à zéro quels que soient  $\lambda$  et  $\mu$ , c'est-à-dire que l'on ait (n° 6, I), quels que soient  $\lambda$ ,  $\mu$ ,

$$A_1^2(\lambda B_2 + \mu C_2) - A_2[A_1(\lambda B_1 + \mu C_1) - A_2(\lambda B_0 + \mu C_0)] = 0,$$

ou, en égalant à zéro le coefficient de  $\lambda$  et celui de  $\mu$ ,

$$A_1^2 B_2 - A_2(A_1 B_1 - A_2 B_0) = 0,$$

$$A_1^2 C_2 - A_2(A_1 C_1 - A_2 C_0) = 0.$$

## TABLE DE CARACTÉRISTIQUES DE BASE 30 030

DONNANT, EN UN SEUL COUP D'ŒIL,

LES FACTEURS PREMIERS DES NOMBRES

PREMIERS AVEC 30 030 ET INFÉRIEURS A 901 800 900

PAR

Ernest LEBON (Paris).

(Extrait de l'Introduction)

### Travaux anciens et modernes sur les nombres premiers.

Dans l'ancienne Grèce, les premières recherches sur les nombres premiers ont été faites par ERATOSTHÈNE qui, pour trouver les nombres premiers, a donné la méthode, toujours classique, du Crible, et par EUCLIDE qui a établi qu'il existe un nombre premier supérieur à un nombre premier donné.

L'espace nous manque pour donner un aperçu des recherches faites, après ces deux promoteurs, sur la détermination des nombres premiers, sur le nombre des nombres premiers