

Travaux de M. Ernest Lebon sur les nombres premiers.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Tables de facteurs premiers a pris un nouveau relief. On a montré l'utilité qu'il peut y avoir à connaître les facteurs premiers des nombres composés dans la Théorie des Nombres.

Au Congrès de Nîmes de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, le 3 août 1912, M. C.-A. LAISANT, dans une Note où il rappelle celle qu'il a présentée au Congrès de Marseille en 1891, sur les Tables de diviseurs premiers des nombres, s'est exprimé ainsi :

« Si j'y reviens aujourd'hui, c'est parce que la question n'a pas cessé d'être liée aux progrès futurs de l'Arithmétique et qu'elle a provoqué de nouveaux travaux de la part de mathématiciens... L'Association française a montré qu'elle en comprenait tout l'intérêt par les encouragements accordés dans ce but à M. E. LEBON; c'est à la suite d'une conversation avec ce dernier, et sur son conseil amical, que je me suis décidé à présenter cette Note. »

Travaux de M. Ernest Lebon sur les nombres premiers.

Premières Tables de caractéristiques et Tables de restes.

Soient :

B le produit $2 \cdot 3 \cdot 5 \dots l$ de nombres premiers consécutifs ;

P le produit $(2 - 1)(3 - 1)(5 - 1) \dots (l - 1)$;

I l'un quelconque des P nombres premiers avec B et inférieurs à B ;

x un nombre successivement égal aux entiers positifs à partir de 1.

Chacun des systèmes des P progressions arithmétiques de terme général $Bx + I$ renferme tous les nombres entiers premiers avec B et supérieurs à B.

B est dit la *base* du système considéré, x la *caractéristique*, et I l'*indicateur* d'un terme de ce système.

En m'appuyant sur des propriétés non encore signalées de ces progressions arithmétiques, je suis arrivé à construire une Table de caractéristiques permettant de résoudre rapidement et simplement le double problème suivant :

Un nombre étant donné, reconnaître s'il est premier ou composé, et, dans ce second cas, trouver ses facteurs premiers.

Le 1^{er} mars 1906, j'ai publié une *Table de caractéristiques relatives à la base 2310 des facteurs premiers des nombres inférieurs à 30 030* (Paris, Delalain frères).

M. Eugène ROUCHÉ, en présentant cette Table à l'Académie des Sciences, le 5 mars 1906, a prononcé ces paroles :

« Ce travail consiste dans une Table numérique permettant de trouver rapidement les diviseurs d'un nombre inférieur à 30 030. Sa construction repose sur des propriétés non encore signalées de certaines progressions arithmétiques, et son emploi est appelé à rendre plus de services que les simples Tables de nombres premiers : aussi croyons-nous devoir attirer l'attention des mathématiciens sur la nouvelle Table de M. Lebon. »

Le 3 novembre 1906, à la Classe des Sciences de l'Académie royale de Bruxelles, M. Joseph NEUBERG, dans une *Note bibliographique sur M. Désiré-Ernest LEBON*, s'exprime ainsi :

« Les dernières recherches de M. Lebon se rapportent à des questions ardues d'arithmétique supérieure, à savoir : *Le Nombre et la Somme des nombres premiers de 1 à N* ; *Construction de Tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre composé.* »

Mes premières communications relatives à une Table de caractéristiques de base 30 030 ont été favorablement accueillies au Congrès de 1906 des Sociétés savantes ; par la Société philomathique (1906) ; aux Congrès de 1906 et 1907 de l'Association française pour l'Avancement des Sciences ; par la *R. Accademia dei Lincei* (1906), sur la présentation de M. Vito VOLTERRA ; par le *Bulletin of the American mathematical Society* (1906) ; par *L'Enseignement mathématique*, dirigé par MM. C.-A. LAISANT et H. FEHR (1907) ; par *Il Pitagora*, qui a publié une Table d'éléments relatifs à cette base (1907).

En 1907, Gaston TARRY a publié dans le *Bulletin* de la Société philomathique un Mémoire qui contient ces phrases :

« La méthode de double entrée, inventée par M. Ernest Lebon, ... se présente sous un aspect beaucoup plus séduisant. Elle possède de nombreuses supériorités sur celle que j'ai choisie... Il n'y a plus qu'une Table, et il suffit de jeter un coup d'œil sur la colonne des caractéristiques pour trouver immédiatement les facteurs de N. »

A la fin de la seconde édition de ses *Elementi di Aritmetica* (1 vol. in-8°, Palermo, 1911), M. Gaetano FAZZARI, après

avoir signalé les Tables de diviseurs des nombres dues à BURCKHARDT, DASE, GLAISHER, DAVIS, a écrit :

« Recentemente, il prof. Ernest LEBON, mediante proprietà, da lui segnalate, di alcune progressioni aritmetiche ha, in diverse Memorie, semplificato il problema della costruzione di dette Tavole. »

Dans le *Bulletin* de la Société philomathique, en 1908, j'ai publié un Mémoire intitulé *Recherche rapide des facteurs premiers des nombres à l'aide de deux Tables de restes*, contenant une partie d'une Note pour laquelle l'Académie de Metz m'a décerné le 16 mai 1907 une médaille d'argent.

A propos de cette Table, M. Niels NIELSEN, professeur à l'Université de Copenhague, m'a écrit le 14 janvier 1913 :

« Dans le *Figaro*, j'ai lu, il y a un an à peu près, que vous avez présenté à l'Académie des Sciences un manuscrit (452 pages in-4^o) qui donne les diviseurs premiers depuis 510 510 jusqu'à 100 millions. Cette Note m'a beaucoup intéressé, parce que la théorie des nombres est très aimée par les jeunes mathématiciens de notre Université. Pensez-vous publier ce grand travail ? »

(Il s'agit d'un article de A. BERGET, publié dans le *Figaro* du 19 mars 1912.)

Les *Exercices d'Arithmétique*, par J. FITZ-PATRICK (Paris, 1913), contiennent une Note relative à la théorie et à la construction de cette Table.

Théorie de la nouvelle Table de caractéristiques de base 30 030.

La théorie de ma nouvelle Table de caractéristiques, de base

$$30\ 030 = 2.3.5.7.11.13 ,$$

a été exposée dans cinq Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1914-1917), dans un Mémoire présenté au Congrès du Havre de l'Association française pour l'Avancement des Sciences (1914), dans une Note des *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (1917), enfin dans trois Mémoires du *Bulletin* de la Société philomathique (1917, 1918).

Voici le résumé succinct des parties principales de cette théorie.

Quand $I = 1$, on a

$$n = BK + 1 . \quad (1)$$

Alors, les caractéristiques K croissent de 1 à 30 029.

J'ai construit la Table des caractéristiques $K < 30\,030$ qui contient, en regard de ces caractéristiques K , dans la colonne f. p., les facteurs premiers des nombres qui leur correspondent. Je l'appelle TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\,030$.

Quand I est supérieur à 1, on a

$$n = Bx + I , \quad (2)$$

x désignant la caractéristique.

Par la *méthode* suivante, que j'ai indiquée en 1912, on remplace tout nombre de la forme $Bx + I$ par son moindre multiple ayant la forme $BK + 1$:

On multiplie les deux membres de l'égalité (2) par un indicateur I' tel que le produit

$$I.I' = Bk + 1 , \quad (3)$$

k désignant la caractéristique, et l'on obtient successivement

$$\begin{aligned} nI' &= BxI' + I.I' \\ &= BxI' + Bk + 1 \\ &= B(xI' + k) + 1 \end{aligned}$$

ou

$$nI' = BK + 1 ,$$

en posant

$$K = xI' + k . \quad (4)$$

La formule (4) donne des valeurs de K inférieures ou supérieures à 30 030.

La base étant 30 030, j'ai construit le tableau qui contient sur une même ligne les éléments I , I' et k satisfaisant à l'égalité (3), ainsi que les facteurs premiers des indicateurs I et I' . Ces facteurs sont écrits, à la suite de I et de I' , sur les lignes de I et de I' , parce qu'ils servent quand on a obtenu soit I , soit I' .

Ce tableau s'appelle TABLEAU $I.I' = Bk + 1$.

Ce tableau est indispensable pour faire rapidement les

calculs indiqués par la formule (4). Comme il doit servir pour tous les volumes de la TABLE DE CARACTÉRISTIQUES K , sa place est au début du premier volume, qui contient ensuite la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\ 030$.

Avec le Tome II commencera la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K > 30\ 029$.

Simplifications et Application d'un théorème.

Avec la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\ 030$, on peut, dans bien des cas, trouver les facteurs premiers d'un nombre composé $Bx + I$ sans avoir la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K > 30\ 029$. Il suffit de faire certaines simplifications ou d'appliquer un théorème.

Simplifications. — Avant d'appliquer la formule (4), il faut faire, s'il y a lieu, les simplifications suivantes qui dispensent quelquefois d'appliquer la formule (4) ou qui peuvent amener à l'appliquer avec des valeurs de I' , de x et de k plus avantageuses que les valeurs primitivement trouvées :

1° Comme le nombre $Bx + I$ peut être divisible soit par I' , soit par un ou plusieurs des facteurs premiers p_1, p_2, \dots de I' , il faudra d'abord diviser $Bx + I$ par $I'^m, p_1^m, p_2^m, \dots$ ($m = 1, 2, \dots$), ce qui amène à se servir d'un nombre ayant un autre indicateur I et une autre caractéristique x .

2° On cherche le plus grand diviseur commun Δ à I et à x .

Si $\Delta > 1$, on divise par Δ le nombre $Bx + I$; on obtient ainsi le nombre $Bx_1 + I_1$.

Quand $I_1 = 1$, la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\ 030$ fait connaître si $Bx_1 + 1$ est composé et donne ses facteurs premiers; dans ce cas particulier, qui mérite d'attirer l'attention, x est un multiple de I .

Application d'un théorème. — Supposons que la formule (4) ait donné une valeur de K supérieure à $30\ 029$ et qu'on n'ait pas la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K > 30\ 029$. Alors on applique le théorème suivant, démontré dans une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences, le 6 mars 1916 (*Comptes rendus*, t. 164, p. 482):

Ayant un nombre $BK + 1$, K étant compris entre B et B^2 ,

lorsque le quotient q et le reste r , obtenus en divisant K par B , sont tels que q puisse se décomposer en deux facteurs K_1 et K_2 dont la somme égale r , le nombre $BK + 1$ est le produit de deux nombres $BK_1 + 1$ et $BK_2 + 1$ de la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\,030$.

Les valeurs de K_1 et de K_2 sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - rx + q = 0$$

lorsque le binôme

$$r^2 - 4q$$

est un carré positif.

Donc les facteurs premiers du nombre considéré $Bx + 1$ sont les facteurs des nombres $BK_1 + 1$ et $BK_2 + 1$ de la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\,030$, sauf les facteurs premiers de I' .

*Avantages de la nouvelle Table de caractéristiques
sur les Tables jusqu'ici imprimées.*

Mes recherches ont toujours été dominées par le souci d'occuper moins de place que tous mes devanciers et par le désir d'arriver à la plus grande commodité pour trouver les facteurs premiers.

On comprend que l'ensemble de la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\,030$ et de la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K > 30\,029$ contient beaucoup moins de lignes qu'il n'en faudrait pour inscrire tous les nombres compris entre B et B^2 , si l'on veut bien tenir compte des faits qui suivent :

1° L'emploi de la base $30\,030$ diminue de beaucoup le nombre des nombres dont on doit chercher les facteurs. Il y a à considérer, au lieu de $901\,800\,899$ nombres, seulement

$$30\,029.5760 = 172\,967\,040 \text{ nombres ;}$$

2° Les caractéristiques K des nombres premiers de la forme $BK + 1$ compris entre B et B^2 ne sont pas inscrites ;

3° Les caractéristiques $K > 30\,029$ et correspondant aux nombres premiers $Bx + 1$ ne sont pas inscrites quand I' est premier ;

4° En regard d'une caractéristique K sont inscrits tous les facteurs premiers du nombre $BK + 1$ qui conduit à cette caractéristique ;

5° Avec la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\,030$, on trouve, à une même ligne, les facteurs premiers d'un nombre $BK + 1$ et les facteurs premiers des nombres $Bx + 1$, amenés par la méthode à cette ligne ;

6° Avec la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K > 30\,029$, on peut obtenir, à une même ligne, la décomposition en facteurs premiers de plusieurs nombres composés $Bx + 1$, amenés à la forme $BK + 1$.

Le grand avantage de la *nouvelle Table de caractéristiques* K , et son originalité, c'est donc de diminuer, grâce à tous ces faits, le nombre des lignes à employer et de permettre, une caractéristique K étant connue, la lecture d'un seul coup d'œil de la composition du nombre $BK + 1$ qui correspond à cette caractéristique et presque toujours de la composition de 1 à 15 nombres $Bx + 1$ que la méthode amène à cette caractéristique.

Historique de l'accueil fait à la nouvelle Table de caractéristiques.

Après plusieurs essais, j'ai eu l'heureuse idée que la plus belle solution pour obtenir le double résultat que je cherchais, c'était d'amener tous les nombres à la forme $BK + 1$; et j'ai presque immédiatement vu que le problème dépendait de la résolution de l'équation indéterminée

$$I.I' = Bk + 1, \quad (3)$$

où I' et k sont les inconnues dont les valeurs minimum positives sont inférieures à B .

Au Congrès de Nîmes de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, dans la séance du 2 août 1912, j'énonce le principe qui m'a conduit à construire une *nouvelle Table de facteurs premiers des nombres*. Alors je commence les calculs pour la résolution de l'équation indéterminée, et je trouve des procédés plus rapides que la résolu-

tion classique de cette équation; je prépare la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES K des nombres de la forme $BK + 1$ jusqu'à $K = 30\,029$; et je commence à appliquer ma *méthode* consistant à amener les nombres de la forme $Bx + 1$ à la forme $BK + 1$.

En septembre 1914, j'explique à M. Gaston DARBOUX le perfectionnement profond que j'ai obtenu en ramenant tous les tableaux d'une Table de base B à un seul, le tableau 1, les caractéristiques croissant d'abord de 1 à 30 029, puis de 30 030 à $30\,029^2 + 30\,028$, c'est-à-dire à 901 770 869. Il m'engage à persévérer dans mes recherches et me promet de présenter à l'Académie des Sciences mes Notes sur la *nouvelle Table de diviseurs des nombres*. Il présente, en effet, les 19 octobre 1914, 14 juin 1915, 6 mars 1916, 11 septembre 1916, mes quatre premières Notes.

La cinquième, après la mort de Gaston DARBOUX, fut présentée à l'Académie des Sciences, le 19 mars 1917, par M. A. LACROIX, secrétaire perpétuel.

La sixième fut présentée, le 1^{er} avril 1917, à la *R. Accademia dei Lincei*, par le très éminent mathématicien italien M. VITO VOLTERRA, et signalée à l'Académie des Sciences, le 11 juin 1917, par M. A. LACROIX, secrétaire perpétuel.

En 1917, en qualité de président de la II^e section de la Caisse des recherches scientifiques (Ministère de l'Instruction publique), M. Gaston DARBOUX, ayant vu les manuscrits du TABLEAU I. $I' = Bk + 1$ et de la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES K des nombres $BK + 1$ croissant de 1 à 30 029, m'avait vivement engagé à demander à cette Caisse une subvention pour faire vérifier les calculs relatifs à ce Tableau et à cette Table.

Ma demande fut favorablement reçue. Dans le rapport sur les subventions accordées en 1917, M. A. LACROIX, président de la II^e section, s'est ainsi exprimé :

« Dans plusieurs Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et de l'*Accademia dei Lincei*, à Rome, M. LEBON, agrégé de l'Université, a exposé les propriétés de certaines progressions arithmétiques entières dont il a déduit le moyen de construire une Table des facteurs premiers des nombres entiers jusqu'à 901 800 900. Les Tables connues jusqu'ici étaient des Tables des nombres premiers. L'entreprise, tentée par M. Lebon, de

construire des Tables donnant les diviseurs premiers des nombres est nouvelle, écrit le rapporteur M. Appell; notre confrère, M. Darboux, avait beaucoup encouragé M. Lebon. La subvention qui a été accordée à celui-ci lui a permis de faire exécuter les longs calculs, matériellement nécessaires à l'établissement d'un premier groupe de Tableaux, prêts pour l'impression. »

Afin de pouvoir présenter au public le TABLEAU $I.I' = Bk + 1$, la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\ 030$ et la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES K CROISSANT DE 30 030 A 120 120, qui représentent un ensemble important de caractéristiques, j'avais demandé, au début de l'année 1919, à la Caisse des recherches scientifiques, une subvention pour faire continuer la recherche des facteurs premiers des nombres conduisant à une caractéristique comprise entre 30 030 et 120 120. Mais j'ai reçu la réponse suivante, qui provoque un arrêt dans les calculs :

« Le Conseil d'Administration, d'accord avec la Commission technique, a décidé, dans sa dernière séance, qu'il y avait lieu d'attendre, pour continuer ses subventions, que la partie déjà exécutée de votre travail fût imprimée (24 mars 1919). »

Publication de la nouvelle Table de caractéristiques.

Afin que le TABLEAU $I.I' = Bk + 1$ et la TABLE DES CARACTÉRISTIQUES $K < 30\ 030$ fussent imprimés, ainsi que l'exige la Caisse des recherches scientifiques, le directeur de la Société GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}, M. André DUCROT, ancien élève de l'Ecole polytechnique, a bien voulu signer avec moi, le 29 mars 1919, un traité dont la clause principale est la suivante :

« Les frais d'impression, ainsi que tous autres frais accessoires de fabrication, seront faits de compte à demi par M. Ernest Lebon et par la Société Gauthier-Villars & C^{ie}. »

Paris, le 31 mai 1919.