GÉNÉRALISATION DES COORDONNÉES POLAIRES APPLICATIONS

GÉNÉRALISATION DES COORDONNÉES POLAIRES
APPLICATIONS

PAR

Edouard JABLONSKI (Paris).
Professeur honoraire au Lycée St-Louis.

---

1. — Les formules classiques pour la transformation d'un système de deux ou de trois coordonnées linéaires en coordonnées polaires peuvent aisément être étendues à un système de n coordonnées, soit n variables $x_1, x_2 \dots x_n$ et $n - 1$ arcs $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$. Posons :

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1 = \rho . \cos\lambda_1 . \cos\lambda_2 . \cos\lambda_3 . \cos\lambda_4 \dots \cos\lambda_{n-3} . \cos\lambda_{n-2} . \cos\lambda_{n-1} \\
x_2 = \rho . \sin\lambda_1 . \cos\lambda_2 . \cos\lambda_3 . \cos\lambda_4 \dots \cos\lambda_{n-3} . \cos\lambda_{n-2} . \cos\lambda_{n-1} \\
x_3 = \rho . \quad 1 \quad . \sin\lambda_2 . \cos\lambda_3 . \cos\lambda_4 \dots \cos\lambda_{n-3} . \cos\lambda_{n-2} . \cos\lambda_{n-1} \\
x_4 = \rho . \quad 1 \quad . \quad 1 \quad . \sin\lambda_3 . \cos\lambda_4 \dots \cos\lambda_{n-3} . \cos\lambda_{n-2} . \cos\lambda_{n-1} \\
x_5 = \rho . \quad 1 \quad . \quad 1 \quad . \quad 1 \quad . \sin\lambda_4 \dots \cos\lambda_{n-3} . \cos\lambda_{n-2} . \cos\lambda_{n-1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{n-2} = \rho . 1 \; . \; 1 \; . \; 1 \; . \; 1 \dots \sin\lambda_{n-3} . \cos\lambda_{n-2} . \cos\lambda_{n-1} \\
x_{n-1} = \rho . 1 \; . \; 1 \; . \; 1 \; . \; 1 \dots \; 1 \; . \sin\lambda_{n-2} . \cos\lambda_{n-1} \\
x_n \; = \rho . 1 \; . \; 1 \; . \; 1 \; . \; 1 \dots \; 1 \; . \; 1 \; . \sin\lambda_{n-1} .
\end{array}\right. \qquad (1)$$

La loi de formation de ce tableau est facile à reconnaître. Quels que soient les arcs, il en résulte :

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

ρ, λ_1, λ_2 ... λ_{n-1} sont, dans un espace idéal à n dimensions, les coordonnées polaires du point dont les coordonnées linéaires seraient x_1, x_2, ... x_n.

2. — L'intérêt principal de la généralisation actuelle réside dans celle qui en résulte pour l'expression de la force vive d'un système en coordonnées polaires, son expression en coordonnées linéaires étant prise sous la forme $\Sigma_1^n m_p\left(\frac{dx_p}{dt}\right)^2$.

Faisons $\sqrt{m_p}.x_p = X_p$ et transformons les X_p en coordonnées polaires conformément au tableau (1), puis posons

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 = \rho\cos\lambda_1.\cos\lambda_2 \ldots \cos\lambda_{n-2} \\ U_2 = \rho\sin\lambda_1.\cos\lambda_2 \ldots \cos\lambda_{n-2} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ U_{n-1} = \rho\ 1\ .\ \ 1\ \ \ldots \sin\lambda_{n-2} \end{array}\right. \tag{2}$$

Ce tableau (2) suit la même loi que le tableau (1) où l'indice majeur a été diminué d'une unité, mais ρ et les λ n'y sont pas les mêmes. Il en résulte

$$X_1 = U_1\cos\lambda_{n-1}, \qquad X_2 = U_2\cos\lambda_{n-1}, \ \ldots$$
$$X_{n-1} = U_{n-1}\cos\lambda_{n-1}, \qquad X_n = \rho\sin\lambda_{n-1} \tag{3}$$

et

$$U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{n-1}^2 = \rho^2 . \tag{4}$$

Par analogie avec la formule classique pour $n = 3$, je me propose de démontrer que l'on a :

$$\Sigma_1^n\left(\frac{dX_p}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\cos^2\lambda_2.\cos^2\lambda_3 \ldots \cos^2\lambda_{n-1}\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2 + \rho^2\cos^2\lambda_3 \ldots$$
$$\cos^2\lambda_{n-1}.\left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \rho^2\cos^2\lambda_{n-1}.\left(\frac{d\lambda_{n-2}}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\lambda_{n-1}}{dt}\right)^2 . \tag{5}$$

où

$$\rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2} = \sqrt{m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \ldots + m_nx_n^2} .$$

Il suffit de prouver que si l'égalité (6) est vraie pour $n-1$

elle est vraie pour n. Supposons donc que l'on ait

$$\left(\frac{dU_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dU_{n-1}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \cos^2\lambda_2 \cos^2\lambda_3 \dots$$
$$\cos^2\lambda_{n-2} . \left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2 + \rho^2 \cos^2\lambda_3 \dots \cos^2\lambda_{n-2} \left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^2 + \dots$$
$$+ \rho^2 \cos^2\lambda_{n-2} \left(\frac{d\lambda_{n-3}}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{dt}\right)^2 \qquad (6)$$

de (3) et (4) on tire

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dX_1}{dt} = \dfrac{dU_1}{dt} \cos\lambda_{n-1} - U_1 \sin\lambda_{n-1} . \dfrac{d\lambda_{n-1}}{dt} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dX_{n-1}}{dt} = \dfrac{dU_{n-1}}{dt} \cos\lambda_{n-1} - U_{n-1} \sin\lambda_{n-1} \dfrac{d\lambda_{n-1}}{dt} \\ \qquad \text{avec} \quad \dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{d\rho}{dt} \sin\lambda_{n-1} + \rho\cos\lambda_{n-1} \dfrac{d\lambda_{n-1}}{dt} \end{array}\right. \qquad (7)$$

et

$$U_1 \frac{dU_1}{dt} + U_2 \frac{dU_2}{dt} + \dots + U_{n-1} \frac{dU_{n-1}}{dt} = \rho . \frac{d\rho}{dt} . \qquad (8)$$

Le calcul s'achève sans peine et, toutes réductions faites, donne l'égalité (5) qui est ainsi démontrée.

3. — L'expression généralisée de la force vive d'un système permet d'étendre largement l'application de la méthode de Jacobi pour la transformation d'un système canonique ou même, dans certains cas, d'en faire l'intégration, comme on le verra plus loin sur un exemple.

Considérons un système de n' points matériels, les coordonnées rectilignes trirectangles de l'un d'eux, sont x_i, y_i, z_i, les composantes de la vitesse x'_i, y'_i, z'_i et la masse m_i. Nous les désignerons généralement par x_p, x'_p, m_p (p de 1 à $3n'$ ou n). Supposons que les équations différentielles du mouvement de ces points forment un système canonique

$$\left\{\begin{array}{l} m_p \dfrac{dx_p}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x'_p} \\ m_p \dfrac{dx'_p}{dt} = - \dfrac{\partial H}{\partial x_p} \end{array}\right. \quad \text{où} \quad H = \frac{1}{2} \sum_1^n m_p (x'_p)^2 - F(x_1, x_2, \dots x_n)$$

(F, fonction de forces)

Si l'on fait, comme plus haut, $x_p . \sqrt{m_p} = X_p$ d'où $x'_p \sqrt{m_p} = X'_p$, le système des équations du mouvement reste canonique et devient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX_p}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial X'_p} \\ \frac{dX'_p}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial X} \end{aligned}\right. \quad \text{où } H = \frac{1}{2}\sum_1^n (X'_p)^2 - F\left(\frac{X_1}{\sqrt{m_1}}, \frac{X_2}{\sqrt{m_2}}, \dots \frac{X_n}{\sqrt{m_n}}\right). \qquad (9)$$

Cela posé, si l'on substitue aux coordonnées X les coordonnées polaires précédemment généralisées, la fonction H prend la forme

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\cos^2\lambda_2 \dots \cos^2\lambda_{n-1}\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2 + \dots \right.$$
$$\left. + \rho^2\cos^2\lambda_{n-1}\left(\frac{d\lambda_{n-2}}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\lambda_{n-1}}{dt}\right)^2\right] - F_1(\rho, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}) .$$

Appliquons alors la méthode de Jacobi. Soit $\varphi(\rho, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ une fonction quelconque des coordonnées polaires généralisées et de n quantités α généralement variables mais ne contenant pas le temps t explicitement, puis faisons :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}, \quad \rho^2\cos^2\lambda_2 \dots \cos^2\lambda_{n-1}\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1},$$
$$\rho^2\cos^2\lambda_3 \dots \cos^2\lambda_{n-1}\left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}, \quad \dots \rho^2\cos^2\lambda_{n-1}\frac{d\lambda_{n-2}}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda},$$
$$\rho^2\frac{d\lambda_{n-1}}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_{n-1}} .$$

H prend la forme

$$H_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}\right)^2}{\cos^2\lambda_2 \dots \cos^2\lambda_{n-1}} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}\right)^2}{\cos^2\lambda_3 \dots \cos^2\lambda_{n-1}} + \dots \right.$$
$$\left. \frac{1}{\rho^2}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_{n-2}}\right)^2}{\cos^2\lambda_{n-1}} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_{n-1}}\right)^2\right] - F_1$$

et, si d'autre part nous posons :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} = s_1 \,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} = s_2 \,, \quad \ldots \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n} = s_n \,, \tag{10}$$

le système des équations différentielles reste canonique et devient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha_p}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial s_p} \\ \frac{ds_p}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_p} \,. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

La fonction transformante φ est quelconque, sous la seule condition que les équations (11) définissent les ρ, λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ en fonction des α et s. Convenons de prendre

$$\varphi = \int f(\rho \,,\, d_n).d\rho + \alpha_1\lambda_1 + \int d\lambda_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{\cos^2\lambda_2}} +$$

$$\int d\lambda_3 \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\lambda_3}} + \cdots \int d\lambda_{n-1} \sqrt{\alpha_{n-1}^2 - \frac{\alpha_{n-2}^2}{\cos^2\lambda_{n-1}}} \,. \tag{12}$$

On a alors

$$H_1 = \frac{1}{2}\left[f(\rho \,,\, \alpha_n) + \frac{\alpha_{n-1}^2}{\rho^2} \right] - F.(\rho \,,\, \alpha_1 \,,\, \alpha_2 \,,\, \ldots \, \alpha_{n-1} \,,\, s_1 \,,\, s_2 \ldots s_{n-1}) \,. \tag{13}$$

La fonction $f(\rho, \alpha_n)$ est une fonction arbitraire de ρ de α_n et même des autres α et $\int f(\rho, \alpha_n) d\rho$ est prise comme si ρ était seule variable. Le choix de cette fonction dépend de la question que l'on a en vue et peut conduire à l'intégration complète, ou à une transformation intéressante.

Exemple. Soit le cas où il y a une fonction de forces F ne dépendant que $\rho = \sqrt{\sum_1^{n'} (m_i x_i^2 + m_i y_i^2 + m_i z_i^2)}$ pour $F = K \,.\, \rho^2$, K étant une constante on est dans un cas élémentaire classique).

Convenons de faire $f(\rho, \alpha_n \ldots) = \sqrt{2F_1(\rho) - \frac{\alpha_{n-1}^2}{\rho^2} + 2\alpha_n}$

alors, en vertu de (13), H_1 se réduit à α_n et le système (11) devient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha_1}{dt}=0\ ,\quad \frac{d\alpha_2}{dt}=0\ ,\quad \dots\ \frac{d\alpha_{n-1}}{dt}=0\ ,\quad \frac{d\alpha_n}{dt}=0\\ &\frac{ds_1}{dt}=0\ ,\quad \frac{ds_2}{dt}=0\ ,\quad \dots\ \frac{ds_{n-1}}{dt}=0\ ,\quad \frac{ds_n}{dt}=-1\ . \end{aligned}\right. \tag{14}$$

L'intégration se fait donc complètement. Les intégrales générales du mouvement avec $2n$ ou $6n'$ constantes arbitraires sont les équations (10).

Royan, 31 mars 1920.

SUR LES SYSTÈMES DE NOMBRES BICOMPLEXES

PAR

L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel).

---

1. — A côté des nombres complexes ordinaires $a + bi$, vulgarisés par les travaux de Gauss et de Cauchy, on a envisagé d'autres nombres qui leur font en quelque sorte pendant et qui ont d'intéressantes applications. Ce sont $a + bj$ (nombres complexes de deuxième espèce), et $a + b\omega$ (nombres complexes de troisième espèce) où les symboles i, j, ω, appelés *unités relatives,* sont définis respectivement par

$$i^2 = -1\ ,\qquad j^2 = +1\ ,\qquad \omega^2 = 0 \tag{1}$$

tandis que a et b représentent toujours des nombres réels dits *coordonnées* de ces complexes.

Théorème. — *Ces trois espèces de nombres représentent les trois seules catégories possibles de nombres complexes à deux coordonnées, quand l'égalité des complexes est définie par l'égalité des coordonnées correspondantes et que le système doit contenir comme sous-groupe le corps des nombres réels.*