

Congrès international des mathématiciens.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHRONIQUE

Congrès international des mathématiciens.

Strasbourg, 22-28 septembre 1920.

Le congrès de Strasbourg forme le premier d'une nouvelle série de congrès internationaux de mathématiciens. A l'avenir, les congrès seront organisés par l'*Union internationale de mathématiques*,¹ dont la création projetée à Bruxelles en juillet 1919, sous les auspices du *Conseil international de recherches*, a été définitivement approuvée par les délégués des pays de l'Entente, dans une réunion préliminaire tenue à Strasbourg le 20 septembre dernier.

A la suite de l'invitation adressée à titre individuel aux savants des pays de l'Entente et de quelques pays neutres, près de deux cents mathématiciens se sont réunis à Strasbourg, où ils ont trouvé l'accueil le plus chaleureux. Après les séances consacrées aux travaux scientifiques, ils ont eu le privilège de se rencontrer dans les réceptions officielles fort brillantes, organisées par le Comité local (mercredi 22 septembre), par la Société des Amis de l'Université, (jeudi 23 septembre), par la Municipalité (vendredi 24 à 10 h. $\frac{1}{2}$), par la Société des Sciences du Bas-Rhin (vendredi 24 à 20 h. $\frac{1}{2}$), par M. le Commissaire général (samedi 25). Mentionnons aussi la visite des musées et des monuments de la Ville, l'excursion à Sainte-Odile (dimanche 20 septembre), l'excursion sur le Rhin, avec visite des ports de Strasbourg et de Kehl (lundi 27 sept.), le banquet de clôture (mardi 28 sept.) et les excursions, faites au lendemain du Congrès, à Saverne, le Haut-Barr (mercredi 29) et à Colmar, aux Trois-Epis et aux champs de bataille du Linge (jeudi 30 septembre).

SÉANCE D'OUVERTURE.

La séance inaugurale du Congrès a eu lieu le mercredi 22 septembre, à 9 h. et demie, à l'Aula de l'Université, sous la pré-

¹ Voir l'*Enseignement Mathématique*, XXI^e année, N^o 1. p. 59-61, 1920.

sidence de M. CHARLÉTY, recteur, en remplacement de M. ALAPE-TITE, Commissaire général de la République.

Après les paroles de bienvenue adressées aux congressistes par le Recteur et par M. LÉVY, représentant la Ville de Strasbourg, M. PICARD, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, parlant au nom du Comité d'organisation du Congrès, a prononcé un discours d'une grande élévation de pensée. En voici les passages essentiels :

« Quand nous vous avons proposé de vous réunir à Strasbourg, nous avons pensé rendre hommage à la noble terre d'Alsace, revenue à cette patrie française, à laquelle la rattachent ses antiques origines et des sympathies restées toujours vivaces à travers les péripéties de son histoire. Nous avons aussi voulu honorer l'Université de Strasbourg, qui, depuis le seizième siècle, a compté tant de maîtres distingués. Les hommes éminents qui y enseignent aujourd'hui tiennent dignement le rôle que leur imposent les tragiques événements de ces dernières années, en faisant d'eux les pionniers de la culture généreuse et humaine que fut toujours la culture française. Nous prions le conseil de l'Université d'agréer l'expression de notre gratitude pour la gracieuse hospitalité qu'il nous offre dans ce Palais. Comment ne pas rappeler, en ce lieu, l'admirable conduite de tant de maîtres de notre enseignement dans la guerre qui vient de finir ; leur foi patriotique a contribué à la victoire commune, qui nous permet aujourd'hui de nous réunir dans la ville de Strasbourg. Je tiens à saluer particulièrement l'un des plus jeunes maîtres de cette Université, qui porte sur son visage les traces glorieuses de son héroïsme.

« Nous sommes aussi très reconnaissants au Comité local, formé de professeurs de la Faculté des Sciences, qui, sous l'active direction de M. Henri Villat, a eu la lourde charge de régler nos séances et d'organiser les réceptions et les promenades, dont le charme tempérera l'austérité de nos travaux. Nos collègues de Strasbourg ont considéré en effet qu'ils avaient le devoir de faire connaître à nos hôtes quelque chose de cette Alsace, dont le nom est devenu un symbole. Nous voulons espérer que tous les Congressistes en emporteront un touchant souvenir.

« Il m'est enfin particulièrement agréable de remercier M. le Maire et M. le Président de la Chambre de Commerce de Strasbourg, ainsi que les représentants de nombreuses Sociétés Alsaciennes et autres généreux bienfaiteurs de ce Congrès, dont les dons nous sont extrêmement précieux et permettront des publications témoignant de l'activité scientifiques de cette Réunion.

« Dans un article récent, plein de remarques pénétrantes sur l'enseignement des mathématiques en divers pays, un professeur de cette Université évoquait le souvenir de deux mathématiciens,

qui y enseignèrent jadis : *Sarrus*, dont le nom restera dans l'histoire du calcul des variations, et *Arbogast* qui apparaît comme un précurseur du Calcul fonctionnel. J'ajouterai à ces deux noms de mathématiciens celui, peut-être inattendu, de *Pasteur*. Le jeune savant, qui vint ici en 1849 enseigner la chimie, ne se montrait-il pas alors quelque peu géomètre. Les mémoires célèbres de *Pasteur* sur l'hémiédrie et la polarisation rotatoire, qui datent de cette époque, relèvent de la géométrie : géométrie bien pittoresque d'ailleurs, où certains champignons microscopiques se montrent habiles mathématiciens, puisqu'ils savent distinguer, pour s'en nourrir, entre un cristal droit et un cristal gauche. C'est par la voie de la géométrie que *Pasteur* est entré dans l'étude des fermentations. Strasbourg peut être fière d'avoir compté ce grand homme parmi ses maîtres.

« Messieurs, c'est un des objets des Congrès, comme celui que nous inaugurons aujourd'hui, d'établir des relations personnelles entre les chercheurs qui cultivent la même science ou des sciences voisines. Après l'effroyable tourmente de ces dernières années, qui a rompu tant de liens, les rapprochements sont nécessaires entre savants qui s'estiment et qui, sans aucune arrière-pensée, n'ont d'autre souci que le culte désintéressé de la vérité. Ils sont particulièrement utiles aux mathématiciens qui ont parfois montré quelque tendance à s'isoler dans des parties très limitées de leur science. De larges esquisses, faisant connaître l'état actuel de quelques grandes questions, doivent être un des attrait de réunions comme la nôtre, et peuvent exercer la plus heureuse influence. Les mathématiciens passent quelquefois pour des personnages un peu originaux, ensevelis dans leurs symboles et perdus dans leurs abstractions. Il importe que le public cultivé, de formation parfois trop exclusivement littéraire, ait une opinion plus juste à cet égard. Non, la mathématique n'est pas la science étrange et mystérieuse que se représentent tant de gens ; elle est une pièce essentielle dans l'édification de la philosophie naturelle.

« Toute théorie physique, suffisamment élaborée, prend nécessairement une forme mathématique ; il semble que les actions et réactions entre l'esprit et les choses ont amené peu à peu à former des moules où peut, partiellement au moins, s'insérer le réel. Certes, beaucoup de concepts créés par les mathématiciens n'ont pas trouvé encore d'applications dans l'étude des phénomènes physiques, mais l'histoire de la science montre qu'il serait téméraire d'affirmer que telle ou telle notion ne sera pas un jour utilisée. Les géomètres aiment à rappeler le mot du grand mathématicien Lagrange, qui, comparant un jour les mathématiques à un animal dont on mange toutes les parties, disait : « Les mathématiques sont comme le porc, tout en est bon. »

« Le métier de prophète est toujours dangereux. Quelques-uns

pensent cependant que les applications des mathématiques seront surtout étudiées dans les années qui vont venir et que la théorie pure sera quelque peu négligée par les jeunes générations. Le temps où nous vivons devient en effet singulièrement dur dans tous les domaines pour les ouvriers de l'intelligence, et les plus optimistes se demandent parfois avec inquiétude si la civilisation, telle que nous sommes habitués à l'envisager, ne va pas subir une éclipse. Aussi ne devons-nous pas nous lasser de répéter que les spéculations théoriques sont en dernière analyse la véritable source de tous les progrès dans les sciences appliquées. Si par malheur la recherche désintéressée cessait d'être possible, le capital scientifique accumulé dans les âges antérieurs s'épuiserait rapidement, et on ne continuerait pas longtemps à vivre du parfum d'un vase vide, comme disait Renan pour un autre objet. Quoi qu'il advienne, on trouvera toujours parmi les mathématiciens des incorrigibles idéalistes, qui, semblables à la femme de l'Évangile, croiront avoir choisi la meilleure part en scrutant les propriétés de l'espace et en analysant dans ses recoins les plus subtils l'idée de fonction ; elle ne leur sera pas ôtée. C'est dans l'espérance que les mathématiques pures et les mathématiques appliquées continueront une collaboration féconde, que nous commençons les travaux de ce Congrès, où de très nombreuses communications nous ont été promises, et où d'éminents géomètres voudront bien nous faire quelques conférences générales sur les progrès et les tendances de la science qui nous est chère. Que tous ceux qui vont ainsi contribuer à l'éclat de cette réunion veuillent bien recevoir par avance les remerciements du Comité d'organisation. »

DÉLÉGATIONS. — On entendit ensuite les délégués des différents pays. Tous ont rendu hommage à la science française.

BUREAU DU CONGRÈS. — Dans une seconde séance, d'un caractère purement administratif, le Congrès a constitué comme suit son Bureau :

Président d'honneur : M. Camille JORDAN, membre de l'Institut. — *Président* : M. Emile PICARD, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — *Vice-présidents* : MM. DICKSON, professeur à l'Université de Chicago, LARMOR, professeur à l'Université de Cambridge, NÖRLUND, professeur à l'Université de Lund, de la VALLÉE POUSSIN, professeur à l'Université de Louvain, VILLAT, professeur à l'Université de Strasbourg, VOLTERRA, professeur à l'Université de Rome. — *Secrétaire général* : M. KÖNIGS, membre de l'Institut. — *Secrétaire* : M. GALBRUN, professeur à l'Université d'Aix-Marseille.

UNION INTERNATIONALE DE MATHÉMATIQUES. — Dans cette même séance, il a été donné communication des Statuts de l'Union. Les pays neutres ont été invités à donner leur adhésion.

CONFÉRENCES GÉNÉRALES

Les conférences générales, au nombre de cinq, ont été réparties comme suit :

1. — Jeudi 23 septembre, 14 h. 30. — Sir Joseph LARMOR, professeur à l'Université de Cambridge (Angleterre) : *Questions in physical interdetermination*.

2. — Vendredi 24 septembre, 14 h. 30. — M. DICKSON, professeur à l'Université de Chicago : *Relations between the Theory of Numbers and other branches of Mathematics*.

3. — Samedi 25 septembre, 10 h. 30. — M. de la VALLÉE POUSSIN, professeur à l'Université de Louvain : *Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent*.

4. — Lundi 27 septembre, 10 h. 30. — M. VOLTERRA, professeur à l'Université de Rome : *Sur l'enseignement de la Physique mathématique et de quelques points d'analyse*.

5. — Mardi 28 septembre, 14 h. 30. — M. NÖRLUND, professeur à l'Université de Lund (Suède) : *Sur les équations aux différences finies*.

Nous sommes en mesure de pouvoir donner un aperçu très fidèle de ces conférences, grâce aux résumés qu'ont bien voulu nous remettre MM. les auteurs.

1. — CONFÉRENCE de Sir Joseph LARMOR : *Questions in physical interdetermination*. — La relativité est essentiellement une détermination locale. Ceci implique pourtant des relations entre ces déterminations locales dont l'ensemble n'est alors pas distinct du prolongement de l'une d'elles au-delà de son propre domaine. Il y a donc interdétermination.

Dans la relativité de la gravitation, il y a quatre degrés d'indétermination, une région de l'espace-temps étant déterminée localement par six variables au moyen d'équations différentielles. Les quatre autres variables dont la présence dans la théorie s'impose, deviennent superflues, grâce à certaines identités, pour une région déterminée seulement par des relations entre distances ; elles sont au contraire indispensables, si cette région a des caractéristiques électriques aussi bien que métriques. Un champ électrique détermine toute chose : on peut dire qu'il détermine un éther de référence qui, autrement, resterait latent.

La méthode analytique symbolique en physique a été développée systématiquement par Lagrange. Elle est moins expressive, mais elle est moins limitée par sa dépendance de l'intuition que la méthode directe de géométrie vectorielle infinitésimale. Ces deux méthodes se complètent l'une l'autre.

Le principe de prolongement complet a été énoncé par Gauss pour le potentiel Newtonien. Il peut être étendu à tout problème statique où la stabilité est présupposée : (exemple : un milieu élastique). Il n'y a pas là relation de cause à effet, mais uniquement concomitance.

Le principe se perd dans un quasi-espace comme celui de Minkowski. Une telle extension à quatre paramètres est l'analogie, non pas de l'espace, mais de la radiation dans l'univers actuel.

Toute communication entre les objets permanents (atomes de matière), est établie par radiation — exceptées les influences de gravitation.

C'est une interdétermination limitée. Un champ de radiation ne peut être étendu par prolongement à moins que nous ne connaissions la distribution des « sources » (atomes radiants) au-delà de ce champ.

La radiation pure exige que l'espace ait précisément trois dimensions.

Un champ de radiation a des propriétés intrinsèques par rapport au groupe de transformations à quatre paramètres de Minkowski, tout comme un corps solide n'a de sens que dans le groupe cartésien à trois paramètres de l'espace ordinaire.

Le principe de moindre action est fondamental en physique parce que, d'après Hamilton, il établit un système de relations « extrémales », c'est-à-dire de relations aux extrémités, aux limites de l'intégrale. L'action à distance est remplacée par des relations à distance, dues cependant à l'intermédiaire de radiations dans l'espace-temps.

Si un système matériel composé d'un ensemble fini d'atomes et d'ions est donné, son champ d'activité devrait être défini et déterminé sans pour cela pouvoir être exprimé au moyen des longueurs et des temps par lesquels nous exprimons habituellement l'ensemble donné espace-temps. Nous pouvons appeler *éther* le complexe de relations qui déterminent ce champ d'activité. Dans un tel éther (aussi bien que dans la théorie d'Einstein), la gravitation peut être absorbée et les rayons déviés près du soleil. Mais on n'y peut admettre le déplacement des raies du spectre solaire.

2. — CONFÉRENCE de M. LÉONARD DICKSON : *Relations between the Theory of Numbers and other Branches of Mathematics*. — Dans cette conférence, nous envisageons quelques problèmes typiques de la théorie des nombres abordés par le moyen d'autres parties des mathématiques, plutôt que de faire une discussion technique de cette théorie.

Ainsi, je donne d'abord une application de la géométrie pour trouver toutes les solutions rationnelles de quelques équations homogènes. Je ne parle pas ici des équations du second degré

dont toutes les solutions rationnelles peuvent se trouver tout de suite quand une solution est connue, parce que nous pouvons évidemment exprimer rationnellement les coordonnées de tous les points d'une surface quadrique par le moyen des droites passant par un point choisi sur la surface.

Pour fixer les idées je débute par la surface cubique de Hermite qui contient deux droites dont les équations ont leurs coefficients rationnels. Toute droite qui coupe celle-ci rencontrera la surface en un seul autre point dont les coordonnées sont par suite rationnelles. Une seconde méthode de solution est basée sur le fait que la surface cubique est le lieu des intersections des plans correspondants de trois faisceaux projectifs de plans (chaque faisceau étant la totalité des plans passant par un point). Nous pouvons passer de notre première solution qui est du 4^e degré par rapport à l'ensemble des paramètres à la seconde solution qui est du 3^e degré par rapport aux nouveaux paramètres, au moyen d'une transformation birationnelle des paramètres, transformation qui se trouve être ici sa propre inverse.

D'une façon générale, quand on a deux représentations paramétriques quelconques de tous les points d'une surface unicursale, les deux ensembles de paramètres sont liés par une transformation birationnelle.

Ensuite j'examine le problème plus difficile de trouver toutes les solutions en entiers, ou plus exactement de trouver des formules qui donnent toutes les solutions en entiers, quand les paramètres n'ont que des valeurs entières. En cherchant des matières intéressantes pouvant illustrer ce sujet, j'ai découvert une méthode bien simple et générale pour trouver les formules qui donnent toutes les solutions en entiers des équations homogènes et quadratiques à plusieurs variables. Dans le cas le plus simple, ces formules expriment le fait que la norme du produit de deux nombres complexes est égale au produit de ses normes.

Pour les équations à quatre variables, nous avons besoin de quelques propriétés simples des nombres algébriques, tandis que pour les équations à six variables nous faisons application des propriétés des quaternions entiers. En accord avec le but de cet exposé qui est de faire voir des applications de plusieurs parties des mathématiques à la théorie élémentaire des nombres, je saisis cette occasion de montrer que les théories des nombres algébriques et hypercomplexes nous donnent des moyens effectifs pour traiter la solution en entiers des équations.

Enfin, j'indique comment les invariants se présentent tout à fait naturellement dans la théorie des nombres.

3. — CONFÉRENCE de M. C. DE LA VALLÉE POUSSIN : *Les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent.* — La défini-

tion des fonctions à variation bornée est due à M. C. JORDAN (C-R, 1881). L'illustre mathématicien français y a été conduit dans l'étude de la convergence des *séries de Fourier* ; et, plus tard, il a trouvé une application toute naturelle de la même notion dans l'étude des *courbes rectifiables* (Cours, t. III, 1887).

Cette notion des fonctions à variation bornée s'est montrée extrêmement féconde. Parmi ceux qui ont poursuivi la voie ouverte par M. Jordan pour l'étude des séries de Fourier, il faut citer, en toute première ligne, M. W.-H. YOUNG, qui a publié sur la question un grand nombre de mémoires et obtenu les résultats les plus généraux.

Mais le conférencier ne s'occupe point de ces travaux. Le développement de la théorie des fonctions à variation bornée s'est fait dans un sens inattendu et que l'inventeur ne pouvait prévoir, parce que ce développement n'est devenu possible qu'après les travaux de M. Lebesgue sur les intégrales définies.

L'instrument imaginé par M. Lebesgue a permis de pousser extrêmement loin l'étude *intrinsèque* des fonctions à variation bornée, de les disséquer en quelque sorte et de faire apparaître leurs parties constitutives distinctes. C'est de cette étude que le conférencier s'est proposé d'exposer les résultats les plus généraux et les conséquences les plus importantes.

Il s'occupe d'abord des diverses *définitions de l'intégrale de Lebesgue*. On peut les ramener à trois types distincts : celle de M. Lebesgue, celle de M. Borel et celle de M. Young. La plus naturelle, parce que c'est celle qui altère le moins la conception antérieure de l'intégrale, est celle de M. LEBESGUE, mais elle suppose les recherches de M. BOREL sur la mesure des ensembles. Les deux autres ne sont venues à l'esprit qu'après le théorème de M. Lebesgue sur l'intégration terme à terme. La démonstration de M. BOREL paraît être la plus élémentaire, parce qu'elle écarte la mesure des ensembles et ne conserve que le principe le plus simple qui sert à édifier cette théorie. La méthode de M. YOUNG est parfaite en son espèce, elle écarte la notion même d'ensemble et ne fait intervenir que des conditions élémentaires de convergence. Mais, à notre point de vue actuel, la méthode de M. Lebesgue est la meilleure, parce que c'est celle qui prépare le mieux à l'étude de l'intégrale *comme fonction d'ensemble*, et que ce point de vue nous est indispensable.

Un des résultats essentiels obtenus dans les derniers temps est d'avoir montré l'identité des fonctions de point à variation bornée et des fonctions additives d'ensemble. L'étude intrinsèque des fonctions à variation bornée se confond donc avec celle des fonctions additives d'ensemble. Mais cette étude est bien plus simple et bien plus instructive quand elle se fait sur les fonctions d'ensemble plutôt que sur les fonctions de point. L'analyse fait aper-

cevoir dans ces fonctions trois parties constitutives distinctes dont elles sont les sommes :

- 1° Une fonction absolument continue : c'est l'*intégrale indéfinie* ;
- 2° Une fonction continue sans l'être absolument : c'est la *fonction singulière* ;
- 3° Une fonction essentiellement discontinue : c'est la *fonction des sauts*.

La fonction des sauts est attachée à un ensemble dénombrable D facile à définir. La fonction singulière est attachée à un ensemble de mesure nulle S plus difficile à caractériser et le conférencier expose les résultats qu'il a obtenus et publiés sur la question.

La définition de l'intégrale d'une fonction continue rentre comme cas particulier dans une définition plus générale, celle de l'*intégrale de Stieljes*. M. Lebesgue s'est posé la question de savoir si l'intégration au sens de Stieljes, ou *par rapport à une fonction à variation bornée*, peut s'étendre aux autres fonctions intégrables. M. Lebesgue a résolu la question en ramenant, par un changement de variable, l'intégrale de Stieljes à une intégrale ordinaire. Mais M. YOUNG a reconnu le premier, en se servant de sa méthode de définition de l'intégrale de Lebesgue, que la définition de cette dernière intégrale est un cas particulier de celle de l'intégrale de Stieljes, mais un cas particulier qui ne présente par rapport au cas général *aucune simplification véritable*. Le conférencier montre que l'on arrive exactement au même résultat avec le procédé de définition de M. Lebesgue.

L'importance de l'intégrale de Stieljes est apparue tout récemment sous son vrai jour, grâce aux travaux de MM. FR. RIESZ, HADAMARD et M. FRÉCHET. Les fonctions d'ensemble se rattachent aux *opérations fonctionnelles*, ou simplement aux *fonctionnelles*, dont M. FRÉCHET a ébauché la théorie générale. Les fonctions additives d'ensemble se confondent avec les fonctionnelles auxquelles M. Hadamard a donné le nom de *fonctionnelles linéaires*. Or M. RIESZ a obtenu ce résultat essentiel : *Toute fonctionnelle linéaire s'exprime par une intégrale de Stieljes*.

Cette intégrale est ainsi rattachée à la plus importante des questions que l'on puisse se poser sur les fonctionnelles, à savoir celle de leur *différentiation*. En effet, la différentielle d'une fonctionnelle est, par définition, une fonctionnelle linéaire. Mais nous n'avons encore sur cette question toute neuve que les Mémoires de M. Fréchet et nous ne pouvons pas encore prévoir ce que l'avenir nous réserve d'intéressantes découvertes dans cette voie.

4. — CONFÉRENCE de M. V. VOLTERRA : *Sur l'enseignement de la Physique mathématique et de quelques points d'Analyse*. — M. Volterra se propose dans sa conférence d'esquisser le pro-

gramme d'un cours qu'il appelle de *physique analytique*, où les différentes théories seraient exposées d'une manière systématique et organique. Il donne d'abord un rapide aperçu sur l'histoire de la physique mathématique et examine la méthode suivant laquelle on enseigne ordinairement cette discipline.

Il se demande si, en prenant pour modèle la mécanique analytique, on ne pourrait pas constituer, pour la physique mathématique, quelque chose qui s'en approche. A son avis, il est actuellement possible de le faire: de même que les équations de la mécanique analytique relient entre eux des problèmes très différents de mécanique, celles de la physique mathématique unissent aussi des questions bien différentes au point de vue physique.

M. Volterra propose de trouver d'abord, d'une manière très rapide, les équations classiques de la propagation de la chaleur, de l'élasticité, de l'électromagnétisme, de l'hydrodynamique et de poser, sans perdre de vue le point de vue physique, les problèmes fondamentaux à résoudre. Les équations obtenues sont d'une nature très semblable.

Il faut maintenant les classer et donner les méthodes générales pour leur résolution. Ce serait l'objet de la seconde partie du cours. M. Volterra propose de faire cette classification au point de vue des caractéristiques. Il classe en même temps les types des différents problèmes. Quant aux méthodes à employer, il les distingue en trois types fondamentaux: celui de Green, celui des caractéristiques et celui des solutions simples.

Il examine ces divers procédés et il en prend occasion pour exposer quelques questions particulières d'un intérêt spécial. Il montre les relations qui conduisent ainsi, d'une manière assez simple et qui évite bien des difficultés, aux concepts de la relativité, aux transformations de Lorentz et à d'autres questions dont il donne un aperçu.

M. Volterra expose comment la méthode préconisée par lui permet de traiter simultanément plusieurs questions de physique mathématique se rapportant à des questions différentes de physique, en faisant ressortir le sens physique des résultats qu'on obtient. Il s'occupe d'une manière spéciale de certaines relations de réciprocité qui, tout en ayant un intérêt pour la solution analytique des problèmes, conduisent, dès qu'on les interprète, à d'importantes propriétés de physique: il cite en particulier, comme exemple, certaines propriétés qui se rattachent à l'étude du phénomène de Hall.

Il porte ensuite son attention sur l'intérêt d'une étude systématique des intégrales fondamentales, de leur signification physique, de leurs propriétés et plus spécialement de leurs singularités.

La troisième partie du programme est consacrée à l'application des méthodes qui se rattachent à la théorie des fonctions qui

dépendent d'un nombre infini et continu de variables et qui permettent la résolution complète des problèmes posés. M. Volterra montre comment ces méthodes s'introduisent ici naturellement. Il indique la classification qu'on peut en faire et les principales questions qui s'y rattachent.

5. — CONFÉRENCE de M. N.-E. NÖRLUND : *Sur les équations aux différences finies*. — Dans cette conférence on envisage le calcul aux différences finies du point de vue de la théorie des fonctions. Le premier problème important qui se pose dans cette branche de l'analyse, c'est l'étude des solutions de l'équation

$$\Delta_{\omega} F(x) = \varphi(x) , \quad \text{où} \quad \Delta_{\omega} F(x) = \frac{F(x + \omega) - F(x)}{\omega} . \quad (1)$$

La série

$$- \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega)$$

satisfait formellement à cette équation, mais elle diverge en général. En appliquant à cette série certains procédés de sommation on peut, dans des cas étendus, associer avec elle une fonction de x et de ω , soit $F(x|\omega)$, qu'on appelle la solution principale de l'équation (1). Cette solution est déterminée à une constante arbitraire près. Elle possède plusieurs propriétés remarquables qui la distinguent des autres solutions de l'équation (1).

Soit m un entier positif quelconque. On a

$$\sum_{s=0}^{m-1} F\left(x + \frac{s\omega}{m} \middle| \omega\right) = mF\left(x \middle| \frac{\omega}{m}\right) .$$

Quand ω tend vers zéro par des valeurs positives, la fonction $F(x|\omega)$ tend vers une limite et l'on trouve

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz .$$

Ces deux équations entraînent que

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|\omega) dz = \int_a^x \varphi(z) dz .$$

Si la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m telle que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0 , \quad \varepsilon > 0$$

on démontre que la fonction $F(x|\omega)$ admet, elle aussi, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers une limite quand x augmente indéfiniment. Cette propriété caractérise la solution principale. Je donne successivement plusieurs autres propriétés qui peuvent servir comme définition de la solution principale et je fais voir comment cette fonction se comporte au voisinage de ses points singuliers.

J'envisage ensuite les équations aux différences finies les plus générales de la forme

$$f_i(x + \omega) = R_i(f_1(x), \dots, f_n(x), x), \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (2)$$

Ces équations peuvent se résoudre à l'aide de la méthode des approximations successives de M. Picard. Dans chaque approximation il faut résoudre une équation de la forme (1). On démontre que les approximations successives convergent vers une limite qui est une solution des équations (2). Ces solutions forment une classe étendue de transcendentes nouvelles.

SÉANCE DES SECTIONS.

Liste des communications présentées au Congrès.

Section I: Arithmétique, Algèbre, Analyse.

- M. YOUNG (Aberystwyth). Sur les définitions de l'aire et du volume et leur développement analytique.
- M. DICKSON (Chicago). Homogenous polynomials with a multiplication theorem.
- M. CHATELET (Lille). La loi de réciprocité abélienne.
- M. DANIELL (Londres). On Stieltjes integrals and Volterra Compositions.
- M. AMSLER (Nancy). Sur le calcul symbolique sommatoire.
- M. FUETER (Zurich). Einige Sätze aus der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Funktionen.
- M. DENJOY (Strasbourg-Utrecht). Sur une classe d'ensembles parfaits en relation avec les fonctions admettant une dérivée généralisée.
- M. STOILOW (Jassy). Sur les ensembles de mesure nulle.
- M. DU PASQUIER (Neuchâtel). Sur une théorie des nombres complexes.
- M. WIENER (Cambridge, Mass.). One certain iterative properties of bilinear operation.
- M. E. PICARD (Paris). Sur les équations aux différences finies.
- M. DRACH (Paris). L'intégration logique des équations différentielles; applications à l'analyse.

- M. HADAMARD (Paris). Sur la solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles et sur les propriétés des géodésiques.
- M. TAKAGI (Tokio). Sur quelques théorèmes généraux de la théorie des nombres algébriques.
- M. TYPPA (Belgrade). Sur l'équation du troisième degré.
- M. STÖRMER (Christiania). Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires.
- M. REMOUNDOS (Athènes). Sur le module et les zéros des fonctions analytiques.
- M. VAROPOULOS (Paris). Sur le module maximum des fonctions algébroides.
- M. RIABOUSCHINSKY (Russie). Sur le calcul des valeurs absolues.
- M. ZERVOS (Athènes). Remarques sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles.
- M. RADL (Prague). Sur la transformation des équations différentielles linéaires.
- M. P. BOUTROUX (Paris). Sur une équation différentielle et une famille de fonctions entières.
- M. LEFSCHETZ (Lawrence, Kans.). Quelques remarques sur la multiplication complexe.
- M. WAWRE (Neuchâtel). Sur un système d'équations à une infinité d'inconnues.
- M. WIENER (Cambridge, Mass.). On the Theory of Sets of points in terms of continuous transformations.
- M. DERUYTS (Liège). Une propriété simple des systèmes transformables.
- M. OGURA (Osaka). Sur la théorie de l'interpolation.
- M. VALIRON (Strasbourg). Sur un point de la théorie des fonctions entières.
- M. ZERVOS (Athènes). Sur l'intégration de certains systèmes différentiels indéterminés.
- M. REY-PASTOR (Madrid). Sur la transformation conforme.
- M. WALSH (Catonsville, Md.). On the location of the Roots of the derivation of a Polynomial.
- M. ZAREMBA (Cracovie). Sur un théorème fondamental relatif à l'équation de Fourier.
- M. YOUNG (Aberystwyth). Sur certaines intégrales doubles.
- M. SACKELLARIOU (Athènes). Sur les solutions discontinues du problème du calcul des variations dans l'espace à n dimensions.

Section II: Géométrie.

- M. APRILE (Sicile). Le congruenze di coniche d'ordine due a classe zero delle spacio. (*Communication non faite.*)
- M. BYDZOWSKY (Prague). Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane.

- M. TAYLOR (Cambridge, Mass.). La géométrie analytique des variables complexes.
- M. CARTAN (Paris). Sur le problème général de la déformation.
- M. DRACH (Paris). L'intégration logique des équations différentielles; applications à la géométrie et à la mécanique.
- M. EISENHART (Princeton). Transformation des systèmes conjugués R.
- M. C. JORDAN (Paris). La classification des constellations.
- M. CLAPIER (Puyricard, B. du Rhône). Sur la transformation de Lie.
- M. HOSTINSKY (Prague). Sur les propriétés de la sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une développable.
- M. SOBOTKA (Prague). Sur la deuxième indicatrice en un point d'une surface.
- M. LE ROUX (Rennes). Sur la géométrie des déformations des milieux continus.
- M. EISENHART (Princeton). Transformation des surfaces applicables sur une quadrique.
- M. MURRAY (Cambridge, Mass.). Method of classifying all polygons having a given set of vertices.
- M. HATZIDAKIS (Athènes). Sur quelques formules de géométrie cinématique.

Section III: Mécanique, Physique mathématique, Mathématiques appliquées.

- M. VANDERLINDEN (Veclé, Belg.). Les théories d'Einstein et leurs applications à l'Astronomie.
- M. BRILLOUIN (Paris). Sur un type d'action à hérédité discontinue et les équations différentielles qui en résultent.
- M. SCHWÆRER (Colmar). Détermination de l'équation séculaire de la terre dans la théorie d'Arrhénius.
- M. E. GUILLAUME (Berne). Expression mono et polyparamétrique du temps dans la théorie de la relativité.
- M. WILLIGENS (Berne). Représentation géométrique du temps dans la théorie de la relativité.
- M. HADAMARD (Paris). Sur le problème mixte pour une équation linéaire aux dérivées partielles.
- M. BANERJI (Calcutta). A some probleme in warthquake. (*Communication non faite.*)
- M. BOCCARDI (Turin). Sur le déplacement du pôle.
- M. DA COSTA-LOBO (Coïmbre, Portugal). Sur la courbe décrite par le pôle sur la surface de la terre.
- M. BOCCARDI (Turin). Sur les approximations numériques et les sciences d'observation.
- M. FARID-BOULAD (Le Caire). Nouveau théorème pour calculer les tensions des barres surabondantes des poutres et arcs à montants et croix de Saint-André.

- M. GREENHILL (Londres). La fonction potentielle uniaxiale et sa fonction de force orthogonale.
- M. GULDBERG (Christiania). Une application des polynômes d'Hermitte à un problème statistique.
- M. HOSTINSKY (Prague). Sur un problème général de la mécanique vibratoire.
- M. MAILLARD (Lausanne). Mise au point des hypothèses cosmogoniques nébuleuses.
- M. ROSENBLATT (Cracovie). Sur la théorie des figures d'équilibre des masses fluides animées d'un mouvement de rotation. (*Communication non faite.*)
- M. Pierre WEISS (Strasbourg). Sur le repérage par le son.
- M. RIABOUSCHINSKY (Russie). Sur la résistance des fluides.
- M. LARMOR (Cambridge, Angl.). Sur la pression des ondes sonores.
- M. LARMOR. Sur les rayons diffractés attachés aux images optiques.
- M. H. VILLAT (Strasbourg). Sur le mouvement variable d'un solide dans un fluide.
- M. de DONDER (Bruxelles). Sur la gravifique. (*Communication réunie avec celle de M. Vanderlinden.*)
- M. BARRAU (Groningue, Holl.). Sur la cinématique plane.
- M. BAUER (Strasbourg). Remarques élémentaires sur le principe de relativité en électrodynamique.

Section IV: Divers. Questions historiques et pédagogiques.

- M. GÉRARDIN (Nancy). Décomposition des nombres.
 — Machines à congruences.
 — Des nombres entiers. — Jeux scientifiques.
- M. BROCARD (Bar-le-Duc). 22 propositions de Fermat.
- M. DELAPORTE (Paris). Sur la réforme du calendrier.
- M. DU PASQUIER (Neuchâtel). Sur les nombres transfinis.
- M. GREENHILL (Londres). Les fonctions de Bessel et Fourier comparées.
- M. d'OCAGNE (Paris). La pratique courante de la méthode nomographique des points alignés, à propos de ses applications de guerre.
- M. GROSSMANN (Zurich). Sur l'état de la publication des œuvres d'Euler.
- M. PESTIGLIONE (Milan). Cyclométrie mécanique. (*Communication non faite.*)
- M. DUBECQ (Buénos-Aires). Communication sur l'enseignement en République Argentine. (*Communication présentée par M. G. Kœnigs.*)
- M. ZERVOS (Athènes). Sur l'enseignement du calcul différentiel et intégral.

SÉANCE DE CLOTURE.

La séance officielle de clôture a eu lieu le mardi 28 septembre, à 17 heures, sous la présidence de M. ALAPETITE, Commissaire général de la République. Après le discours de M. PICARD, président du Congrès, et le rapport de M. KÆNIGS, secrétaire général, de chaleureux remerciements ont été exprimés à tous ceux qui ont contribué à la réussite du Congrès et tout particulièrement au Comité d'organisation. H. FEHR.

COMPTE RENDU DU CONGRÈS A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS.

En rendant compte du Congrès à l'Académie des Sciences¹, M. E. PICARD, secrétaire perpétuel, s'est exprimé en ces termes :

« Il ne sera peut-être pas sans intérêt de donner quelques renseignements sur le Congrès international de Mathématiques, qui vient de finir. C'est à Bruxelles l'année dernière, à la troisième conférence interalliée des Académies scientifiques, que la proposition fut faite de réunir un tel Congrès à Strasbourg. L'Académie se rappelle que la reprise des relations internationales après la guerre avait été étudiée longuement à Londres et à Paris, en octobre et novembre 1918, dans deux conférences interacadémiques, où figuraient des représentants des puissances alors en guerre avec les empires centraux. Dans ces réunions, il fut insisté fortement sur ce point que les guerres antérieures n'avaient pas détruit la mutuelle estime des savants belligérants les uns pour les autres, et que la paix alors avait pu effacer après peu d'années les traces du passé. « Mais aujourd'hui, concluaient à l'unanimité les délégués des pays alliés, les conditions sont tout autres. Des crimes sans nom vont laisser, dans l'histoire des nations coupables, une tache que des signatures au bas d'un traité ne sauraient laver. Aussi devons-nous abandonner les anciennes associations internationales, et en créer de nouvelles avec le concours éventuel des neutres. » Tels sont les principes qui ont guidé les décisions prises d'abord à Londres et à Paris, confirmées et précisées dans une nouvelle conférence tenue à Bruxelles en juillet 1919. Un Conseil international de recherches fut créé, auquel se rattachaient, par l'adhésion à certaines idées générales, mais en gardant une large indépendance, des Unions internationales se rapportant aux différents ordres de sciences. Enfin, les nations neutres seraient priées d'adhérer au Conseil international de recherches, ainsi qu'aux diverses Unions².

¹ Séance de l'Académie des Sciences du 4 octobre 1920.

² Pour le détail des résolutions prises, voir les *Comptes rendus* des 21 octobre 1918, 9 décembre 1918 et 25 août 1919.

« Ce programme est presque entièrement réalisé aujourd'hui. Un grand nombre de pays ont adhéré au Conseil international de recherches, et diverses Unions ont été fondées, dont en dernier lieu l'Union internationale de Mathématiques.

« C'est conformément à ce plan général que fut convoqué le Congrès, qui s'est réuni à Strasbourg, du 22 au 30 septembre. Il est le premier Congrès scientifique international réuni depuis la guerre. Il inaugure un ordre nouveau ne s'insérant dans aucune suite déjà commencée. Des invitations personnelles avaient été envoyées par le Comité national français de Mathématiques aux savants des pays alliés et amis. Nous n'avons jamais dissimulé que nous entendions donner à ce Congrès une signification particulière en le réunissant à Strasbourg. Aussi avons-nous été extrêmement touchés de l'empressement avec lequel nos amis étrangers ont répondu à notre appel. Arrivés dans cette ville, ils se sont laissés, comme nous, pénétrer par l'atmosphère alsacienne, et beaucoup se sont livrés à des réflexions que, loin d'ici, ils n'avaient pas été amenés à faire. Des liens plus intimes ont été formés qui resteront précieux.

« A tout point de vue, le Congrès qui vient de se terminer a réussi au-delà de nos espérances. Nos diverses sections ont entendu des communications de haute importance. Cinq conférences générales, extrêmement brillantes, ont été faites : notre associé étranger, M. Volterra, professeur à l'Université de Rome, a parlé de l'enseignement de la Physique mathématique ; trois de nos correspondants, Sir Joseph Larmor, professeur à l'Université de Cambridge ; M. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain ; M. Dickson, professeur à l'Université de Chicago, ont choisi, comme sujets de leurs conférences, l'indétermination en physique, les fonctions à variation bornée, les relations entre la théorie des nombres et d'autres branches des Mathématiques. Enfin, M. Nörlund, professeur à l'Université de Copenhague, nous a entretenus de la théorie des équations aux différences finies. Toutes les communications et les conférences générales seront réunies dans un Ouvrage qui restera le témoin de l'activité scientifique de ce Congrès.

« M. le Ministre des Affaires étrangères, M. le Commissaire général d'Alsace-Lorraine, M. le Maire et M. le Président de la Chambre de commerce de Strasbourg ont bien voulu s'intéresser à l'œuvre entreprise. Nous avons aussi rencontré un concours empressé auprès des diverses sociétés industrielles et financières, ainsi que de nombreux particuliers, qui ont compris que, dans les circonstances présentes, la réussite de la réunion projetée importait à l'honneur de la Science française. Des uns et des autres nous avons reçu de larges subventions. Je suis sûr d'être l'interprète de l'Académie, qui a pris une si large part dans l'élabora-

tion des nouveaux statuts internationaux, en adressant en son nom des remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'éclat du Congrès de Strasbourg. »

**Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie
de l'Association française pour l'Avancement des Sciences.**

Congrès de Strasbourg, 26-28 juillet 1920.

Les travaux de la Section de Mathématiques, Astronomie, Géo-désie, Mécanique, ont été organisés par le président, M. ESCLANGON, directeur de l'Observatoire, et le secrétaire, M. A. GÉRARDIN, de Nancy. Voici un bref résumé des séances et des 23 communications :

M. ESCLANGON souhaite la bienvenue aux congressistes et rappelle brièvement la vie des mathématiciens décédés depuis la guerre.

1. — M. A. VÉRONNET, de Strasbourg, présente un mémoire *Sur la constitution, la formation et l'évolution des astres*. — Les astronomes avaient appliqué jusqu'à présent au Soleil et aux étoiles la formule des gaz parfaits, ou la loi de Mariotte, formule trop simple, inapplicable aux hautes pressions. M. Véronnet a utilisé la formule plus complète des gaz réels. Il démontre qu'au-dessous de l'atmosphère visible il se produit brusquement un accroissement de densité, ce qui forme un véritable noyau, sensiblement homogène, qui se comporte comme un liquide et dont la température ne dépasse pas le triple de la température superficielle. L'application des lois de l'énergie et du rayonnement au Soleil ainsi constitué, permet de déterminer le temps et la température de sa formation et de son évolution, ainsi que l'évolution correspondante de la Terre.

2 et 3. — M. NAVELLE présente deux études : *Considérations sur les Sciences dites subjectives*, et *Sur l'esprit de Système*.

4. — M. VÉRONNET présente une note de M. FRÉCHET, de Strasbourg, *Sur une nouvelle extension du théorème de Borel-Lebesgue*. — Le théorème de Borel-Lebesgue relatif aux ensembles linéaires avait été étendu dans ma thèse aux classes (D). M. R.-L. Moore l'a ensuite généralisé pour la classe (φ). M. Fréchet l'étend dans sa note aux classes plus grandes encore qu'il a appelées ailleurs classes (H).

5. — M. A. GÉRARDIN présente une communication de M. Ernest LEBON, de Paris, *Sur la Table des caractéristiques*, en rappelant