Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LIOUVILLE PAR L'ÉLIMINATION DU TEMPS ENTRE LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Autor: Turrière, Émile

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515743

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Autre remarque. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ des nombres rationnels et la somme U définie par

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \mathrm{U} \ ;$$

Les x, définis comme plus haut sont des fonctions rationnelles de U. En effet, si l'on pose

$$\alpha_1 x_1 = y_1 \ . \qquad \alpha_2 x_2 = y_2 \dots \alpha_n x_n = y_n$$

on a

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = \mathrm{U}$$

$$y_1^2 = a_1 \alpha_1^2 \ , \qquad y_2^2 = a_2 \alpha_2^2 \dots y_n^2 = a_n \alpha_n^2 \ ;$$

donc les y sont des fonctions rationnelles de U, et il en est de même, par suite, des x.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LIOUVILLE PAR L'ÉLIMINATION DU TEMPS ENTRE LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

M. Émile TURRIÈRE (Montpellier).

---

1. La méthode de LIOUVILLE, lorsqu'elle est applicable à un système à k degrés de liberté, conduit à $2k$ quadratures indépendantes les unes des autres. Ces $2k$ quadratures se partagent en deux groupes. Un premier groupe de k quadratures fournit k—1 relations entre les seuls paramètres q_1, q_2,... q_k du système; le second groupe de k quadratures donne par addition l'expression du temps.

Toutes les relations indépendantes du temps, qui déterminent géométriquement les trajectoires, se séparant ainsi, *comme conséquence du calcul*, des éléments cinématiques, je me suis proposé

d'examiner comment se présente cette séparation des quadratures, lorsqu'on applique à cette question de dynamique les résultats de la théorie de l'élimination du temps dans les équations de LAGRANGE. J'ai été conduit, par cette voie, à une nouvelle démonstration du beau théorème de LIOUVILLE.

L'élimination du temps dans les équations de LAGRANGE telle qu'elle a été effectuée par G. DARBOUX [1] et par M. P. PAINLEVÉ [2] conduit à $k - 1$ équations de même forme que les équations de LAGRANGE : ce sont des équations d'EULER du calcul des variations.

Je crois utile d'indiquer une méthode simple pour déduire ces équations de celles de LAGRANGE sans appliquer le principe de la moindre action. Pour préciser la signification des formules, et, dans un but didactique, j'appliquerai la méthode à deux exemples classiques.

2. *L'élimination du temps dans les équations de Lagrange.* — On sait combien la formule de BINET, dans le cas des forces centrales uniquement fonctions de la distance est utile pour permettre de déterminer la trajectoire d'un point matériel indépendamment du temps. Les k intégrales du théorème de LIOUVILLE donnant les relations entre les seuls paramètres permettent de même d'éliminer la notion du temps.

D'une manière générale, il y a lieu de se poser la question suivante. En prenant l'un des paramètres de LAGRANGE, q_1 par exemple, pour variable fondamentale, obtenir $k - 1$ équations différentielles dans lesquelles $q_2, q_3, q_4, \ldots q_k$ soient les fonctions inconnues et q_1 la variable. Il suffit évidemment d'éliminer le temps entre deux équations de LAGRANGE, celle relative au paramètre q_1 et une autre équation.

Prenons donc deux paramètres, que j'appellerai x et y; je me placerai dans le cas d'existence d'une fonction des forces U et de liaisons indépendantes du temps. Soit $T - U = h$, l'intégrale des forces vives. Les équations de LAGRANGE pour ces paramètres sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

[1] G. DARBOUX. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1889, t. II, p. 499.

[2] Les diverses communications faites en 1892 par M. P. PAINLEVÉ sur les changements de variables dans les équations de la dynamique se trouvent dans les *C. R.*, t. CXIV et CXV.

L'expression de T étant $T = X x'^2 + Y y'^2$, je poserai $\frac{dy}{dx} = \eta$,

$$T = x'^2 . \Theta \ , \qquad \Theta = X + \eta^2 Y \ , \qquad \eta = \frac{y'}{x'} \ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = x'^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} \ , \qquad \frac{\partial T}{\partial y'} = x'^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} . \frac{\partial \eta}{\partial y'} = x' . \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \ .$$

L'intégrale des forces vives donne:

$$T = U + h \ , \qquad x'^2 . \Theta = U + h \ , \qquad x'^2 = \frac{U + h}{\Theta} \ .$$

Je pose encore:

$$\Omega^2 = \Theta . (U + h) \ , \qquad x' = \frac{\Omega}{\Theta} \ .$$

Comme U n'est pas fonction de η:

$$(U + h) \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 2 \Omega . \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \ .$$

$$\frac{\partial T}{\partial y'} = x' \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \frac{2 \Omega}{U + h} . \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} . \frac{\Omega^2}{\Theta} = \frac{2 \Omega^2}{\Theta (U + h)} . \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \ .$$

Il est évident que la dérivation totale par rapport à t d'une fonction quelconque f donne lieu aux égalités suivantes:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} . \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} . x' = \frac{\Omega}{\Theta} . \frac{df}{dx} \ .$$

L'équation de Lagrange relative au paramètre y devient alors, en application de ces diverses formules:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right) = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \ .$$

$$\frac{\Omega}{\Theta} . \frac{d}{dx} \left(2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) = x'^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U + h}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \ ,$$

$$2 \frac{\Omega}{\Theta} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial y} \left[(U + h) \Theta \right] = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial y} (\Omega^2) = \frac{2 \Omega}{\Theta} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \ ;$$

c'est-à-dire finalement:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \ .$$

Telle est la forme définitive de l'équation de la trajectoire, dans laquelle:

$$\eta = \frac{dy}{dx} \; ; \qquad \Theta = \mathrm{T} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 ; \qquad \Omega^2 = (\mathrm{U} + h) \, . \, \Theta \; .$$

Elle a la forme de l'équation d'EULER du calcul des variations.

3. *Exemples.* — Prenons un exemple: celui du point matériel pesant dans le vide, en admettant que la trajectoire est plane et située dans le plan vertical Oxy. Alors (pour une masse $m = 2$):

$$\mathrm{T} = x'^2 + y'^2 \; , \qquad \mathrm{U} = -2gy$$

$$\Theta = 1 + \eta^2 \; , \qquad \Omega^2 = (h - 2gy)(1 + \eta^2) \; .$$

Ici, il convient de faire une remarque analogue à celle qui concerne les coordonnées cycliques ; c'est que l'une des coordonnées, x, est absente de Ω.

Lorsque y est absente de Ω, l'équation trouvée donne

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right) = 0 \; ;$$

et par suite en intégrant

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \text{constante} \; ,$$

$$\sqrt{\mathrm{U} + h} \, . \, \frac{\partial \sqrt{\Theta}}{\partial \eta} = \text{constante} \; .$$

Nous avons donc intérêt dans le cas actuel à prendre y et non x comme variable principale. Posons: $\rho = \dfrac{dx}{dy}$,

$$\Theta = 1 + \rho^2 \; , \qquad \Omega^2 = (h - 2gy)(1 + \rho^2) \; ;$$

il nous suffit d'écrire:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = a \quad (\text{constante}) \; .$$

Pour $t = 0$, le mobile part de l'origine O ($x = 0$, $y = 0$) avec une vitesse de projections ($v_0 \cos \alpha_0$, $v_0 \sin \alpha_0$). On a donc:

$$\rho_0 = \operatorname{cotg} \alpha_0 \; , \qquad \Theta_0 = \frac{1}{\sin^2 \alpha_0} \; , \qquad \Omega_0^2 = \frac{h}{\sin^2 \alpha_0} \; ;$$

d'ailleurs, d'après le théorème des forces vives, $h = v_0^2$; donc:

$$\Omega_0 = \frac{v_0}{\sin \alpha_0} .$$

Par dérivation, nous avons:

$$2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 2\rho(h - 2gy) ,$$

$$a\Omega = \rho(h - 2gy) ,$$

$$\frac{av_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\cos \alpha_0}{\sin \alpha_0} v_0^2 , \qquad a = v_0 \cos \alpha_0 .$$

L'équation de la trajectoire se présente par suite sous la forme suivante:

$$a^2 . (h - 2gy)(1 + \rho^2) = \rho^2 (h - 2gy)^2 ,$$

$$a^2 (1 + \rho^2) = \rho^2 (h - 2gy) ,$$

$$a^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 (h - a^2 - 2gy) ,$$

$$v_0^2 \cos^2 \alpha_0 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 (v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gy) ;$$

$$x - x_0 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gy}} . v_0 \cos \alpha_0 ,$$

$$x - x_0 = \mp \frac{v_0 \cos \alpha_0}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gy} ;$$

la trajectoire est donc la parabole d'équation:

$$v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gy = \frac{g^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} (x - x_0)^2 ;$$

en écrivant que pour $y = 0$, $x = 0$, on détermine la valeur de la constante x_0:

$$x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 ;$$

l'équation définitive de la parabole trajectoire est enfin:

$$\frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{g} y + x^2 - 2xx_0 = 0 ,$$

$$y = - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} + x \operatorname{tang} \alpha_0 .$$

C'est l'équation bien connue.

Passons au second exemple.

Dans le cas des forces centrales, uniquement fonction de la distance et en dynamique du plan:

$$2T = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad U(r) ,$$

θ ne figure pas dans Ω. Il faut alors prendre r comme variable indépendante, et poser:

$$\eta = \frac{d\theta}{dr} , \qquad \Theta = r^2\eta^2 + 1 , \qquad \Omega^2 = (U + h)(r^2\eta^2 + 1) ;$$

l'équation $\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = a$ (constante) conduit à la quadrature:

$$\theta = \pm a \int \frac{dr}{r^2\sqrt{U + h - \frac{a^2}{r^2}}} .$$

4. *Extension au cas d'un nombre quelconque de paramètres.* — Il suffit de prendre q_k, par exemple, pour coordonnée indépendante, et de poser:

$$\frac{dq_1}{dq_k} = \eta_1 , \qquad \frac{dq_2}{dq_k} = \eta_2 , \qquad \frac{dq_{k-1}}{dq_k} = \eta_k ,$$

$$\Theta = Q_1\eta_1^2 + Q_2\eta_2^2 + \dots + Q_{k-1}\eta_{k-1}^2 + Q_k .$$

$$\Omega^2 = \Theta . (U + h) ;$$

Les $k - 1$ équations indépendantes du temps sont alors:

$$\frac{d}{dq_k}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1}\right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_1} ,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dq_k}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_{k-1}}\right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_{k-1}} .$$

5. *Démonstration du théorème de Liouville.* — Pour simplifier l'exposé de la démonstration — (qui sera rapidement rendue générale ensuite) — je supposerai que l'énergie cinétique T a pour expression

$$T = (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k)\left(q_1'^2 + q_2'^2 + \dots + q_k'^2\right) ,$$

que la fonction des forces U est

$$U = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_k}{A_1 + A_2 + \dots + A_k},$$

et que la constante T — U des forces vives est nulle. Je prendrai q_k pour variable indépendante qui, pour simplifier l'écriture, sera désignée par q et je poserai:

$$\eta_1 = \frac{dq_1}{dq}, \qquad \eta_2 = \frac{dq_2}{dq}, \dots \eta_{k-1} = \frac{dq_{k-1}}{dq}.$$

Les dérivés des fonctions

$$A_1(q_1), \quad U_1(q_1), \quad A_2(q_2), \quad U_2(q_2), \dots A_k(q_k), \quad U_k(q_k)$$

seront désignées par accentuation.

Dans ces conditions:

$$\Theta = (A_1 + A_2 + \dots + A_k)\left(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{k-1}^2 + 1\right),$$
$$\Omega^2 = (U_1 + U_2 + \dots + U_k)\left(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{k-1}^2 + 1\right);$$

pour simplifier encore l'écriture et l'impression, il y a lieu de poser:

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{k-1}^2 = H - 1, \qquad U_1 + U_2 + \dots + U_k = U_0.$$
$$\Omega^2 = U_0 \cdot H.$$
$$\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1} = \eta_1 \cdot U_0, \qquad 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} = U_1' \cdot H;$$

la dérivation totale, par rapport à $q_k = q$ de l'avant-dernière égalité ci-dessus donne:

$$\Omega \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1}\right) + \frac{d\Omega}{dq} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1} = \frac{d\eta_1}{dq} \cdot U_0 + \eta_1 \frac{dU_0}{dq};$$

l'équation générale de la théorie de l'élimination du temps,

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_1},$$

transforme l'équation précédente en la suivante:

$$\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} + \frac{d\Omega}{dq} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1} = U_0 \frac{d\eta_1}{dq} + \eta_1 \frac{dU_0}{dq} \; ;$$

$$\frac{1}{2} HU_1' + \frac{\eta_1 U_0}{\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{dq} = U_0 \frac{d\eta_1}{dq} + \eta_1 \frac{dU_0}{dq} \; ,$$

$$\frac{1}{2} HU_1' + \frac{\eta_1 U_0}{2\Omega^2} \left(U_0 \frac{dH}{dq} + H \frac{dU_0}{dq} \right) = U_0 \frac{d\eta_1}{dq} + \eta_1 \frac{dU_0}{dq} \; ,$$

$$HU_1' + \frac{\eta_1}{H} \left(U_0 \frac{dH}{dq} + H \frac{dU_0}{dq} \right) = 2U_0 \frac{d\eta_1}{dq} + 2\eta_1 \frac{dU_0}{dq} \; ,$$

$$H^2 U_1' + \eta_1 U_0 \frac{dH}{dq} = 2HU_0 \frac{d\eta_1}{dq} + \eta_1 H \frac{dU_0}{dq} \; ,$$

$$U_0 \left(2H \frac{d\eta_1}{dq} - \eta_1 \frac{dH}{dq} \right) + \eta_1 H \frac{dU_0}{dq} - H^2 U_1' = 0 \; ;$$

il est évident que $U_1' = \frac{1}{\eta_1} \cdot \frac{dU_1}{dq}$; l'équation obtenue est donc:

$$U_0 (2H \, . \, d\eta_1 - \eta_1 \, . \, dH) + \eta_1 H \, . \, dU - \frac{H^2}{\eta_1} \, . \, dU_1 = 0 \; ;$$

elle s'écrit encore:

$$d \frac{U_0 \eta_1^2}{H} = dU_1 \; ;$$

une intégration, avec une constante additive α_1, donne alors:

$$\frac{U_0 \eta_1^2}{H} = U_1 + \alpha_1 \; ;$$

on a donc un système d'intégrales premières:

$$\frac{\eta_1^2}{H} = \frac{U_1 + \alpha_1}{U_0} \; , \; \ldots \; \frac{\eta_{k-1}^2}{H} = \frac{U_{k-1} + \alpha_{k-1}}{U_0} \; ;$$

l'addition membre à membre de ces égalités donne:

$$\frac{H-1}{H} = \frac{U_0 - U_k + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}}{U_0} \; , \quad \frac{1}{H} = \frac{U_k - \alpha_1 - \alpha_2 \ldots - \alpha_{k-1}}{U_0} \; ;$$

on peut poser, avec une constante α_k telle que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 0 \ ,$$

les égalités suivantes:

$$\eta_1^2 = \frac{U_1 + \alpha_1}{U_k + \alpha_k} \ , \qquad \eta_{k-1}^2 = \frac{U_{k-1} + \alpha_{k-1}}{U_k + \alpha_k} \ ;$$

le problème est résolu par quadratures:

$$\frac{dq_1^2}{U_1 + \alpha_1} = \frac{dq_2^2}{U_2 + \alpha_2} = \ldots = \frac{dq_k^2}{U_k + \alpha_k} \ .$$

Si l'on se place dans le cas le plus général,

$$T = (A_1 + A_2 + \ldots + A_k)\left(B_1 q_1'^2 + B_2 q_2'^2 + \ldots + B_k q_k'^2\right) \ ,$$
$$T - U = h \ ,$$

il est manifeste qu'il faut remplacer U_1 par $U_1 + hA_1$, ... U_k par $U_k + hA_k$, dq_1^2 par $B_1 . dq_1^2$, . . dq_k^2 par $B_k\, dq_k^2$; d'où les formules bien connues:

$$\frac{B_1\, dq_1^2}{U_1 + hA_1 + \alpha_1} = \frac{B_2\, dq_2^2}{U_2 + hA_2 + \alpha_2} = \ldots = \frac{B_k\, dq_k^2}{U_k + hA_k + \alpha_k} \ .$$
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0 \ .$$

Le théorème des forces vives donne finalement l'expression de temps avec k quadratures.