Conférences.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Société mathématique suisse.

Réunion de Bienne, 23 avril 1922.

La Société mathématique suisse a tenu une réunion de printemps à Bienne, le dimanche 23 avril 1922, sous la présidence de M. G. DUMAS, professeur à l'Université de Lausanne. Sur l'invitation du comité, MM. les professeurs W. BLASCHKE et HECKE, de l'Université de Hambourg, et M. PLANCHEREL, de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, ont présenté les conférences dont on trouvera ci-après un résumé. En outre, des communications furent présentées par MM. E. GUILLAUME, G. POLYA et D. MIRIMANOFF.

CONFÉRENCES.

1. *Conférence* de M. E. HECKE (Hambourg). — *Arithmétique et Théorie des fonctions.* — Les plus grands progrès de l'arithmétique ont été effectués lorsqu'on a appliqué aux questions qui y ressortissent le moyen puissant qu'offre l'analyse des variables continues. Il suffit de se rappeler le nom du fondateur de la théorie analytique des nombres : Dirichlet, ainsi que ceux de Gauss, Abel, Kronecker, Kummer, qui firent voir l'importance de la fonction exponentielle et de la fonction elliptique modulaire pour l'arithmétique supérieure.

Une question importante se pose : *Quel secours doit-on attendre de l'analyse* dans l'édification complète de la théorie des corps de nombres algébriques de degrés supérieurs, théorie que l'on doit à Kummer, Dedekind et Hilbert ? *Quels problèmes de théories des fonctions ces questions arithmétiques soulèvent-elles ?*

Le conférencier esquisse les méthodes et les résultats en rapport avec ces matières.

Dans le corps quadratique réel $K(\sqrt{3})$, les « nombres entiers » sont les nombres $\mu = m + n\sqrt{3}$ (m, n, étant rationnels entiers) pour lesquels il est aisé de définir la divisibilité. Les nombres les plus importants du corps sont les diviseurs du nombre 1, ce sont par suite des diviseurs de tous les nombres entiers. C'est précisément le cas du nombre $\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$ « l'unité fondamentale » $\left(\frac{1}{\varepsilon} = 2 - \sqrt{3}\right)$ et des nombres $\pm\, \varepsilon^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ que l'on désigne tous sous le nom d'« unités »; grâce à ces nombres, il est possible de décomposer chaque nombre entier μ en un produit de facteurs entiers, par exemple $\mu = \varepsilon \cdot \frac{\mu}{\varepsilon}$; ces décompositions en facteurs sont peu intéressantes. Les nombres premiers dans $K(\sqrt{3})$ sont des nombres entiers du corps qui ne peuvent être décomposés en un produit de facteurs entiers — les facteurs unités étant exclus. On peut alors démontrer que chaque nombre entier du corps est décomposable d'une seule manière en un produit de facteurs premiers, pourvu que l'on fasse abstraction des facteurs unités.

Dirichlet a déjà reconnu la signification de la fonction:

$$\zeta_k(s) = \sum_{(\mu)}{}' \frac{1}{|N(\mu)|^s} \qquad (N(\mu) = \mu\mu' = m^2 - 3n^2)$$

qui est, par rapport au corps $K(\sqrt{3})$, l'analogue de ce qu'est la fonction $\zeta(s)$ de Riemann pour le corps naturel. Dans l'expression de $\zeta_k(s)$, la sommation porte sur toutes les valeurs entières $\mu \neq 0$, du corps qui ne sont pas associées, c'est-à-dire telles que deux d'entre elles ne diffèrent pas par un facteur unité. Cette fonction de la variable s, par suite de l'unicité de la décomposition d'un entier, est représentable en un produit infini :

$$\zeta_k(s) = \prod_{(\pi)} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{|N(\pi)|^s}},$$

où π passe par tous les nombres premiers non associés. Les propriétés de la fonction analytique $\zeta_k(s)$ jouent un grand rôle dans la recherche des nombres premiers du corps. L'un des premiers résultats relatifs à ce point est le théorème de Dirichlet, qui assure qu'il existe une infinité de nombres premiers π.

Considérons maintenant l'ensemble des nombres $m + n\sqrt{3}$ comme une multiplicité à deux dimensions; les recherches récentes ont eu pour but l'étude de certaines fonctions des deux variables qu'on peut attacher au corps. Voici comment il nous paraît que le pas essentiel peut être effectué dans cette direction : Par analogie avec les recherches classiques, formons la forme quadratique définie qui correspond au corps $K(\sqrt{3})$, soit $A\mu^2 + A'\mu'^2$, où μ et μ' sont conjugués et A et A' positifs; puis formons pour $s > 1$ la série convergente

$$\sum_{\mu} \frac{1}{(A\mu^2 + A'\mu'^2)^s}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de μ, à l'exclusion de $\mu = 0$. En multipliant les dénominateurs par un nombre approprié C^s on peut s'arranger pour que $AA' = 1$; posons alors $A = e^x$, $A' = e^{-x}$, nous obtenons alors la fonction

$$Z(s\,;\,x) = \sum_{\mu} \frac{1}{(e^x\mu^2 + e^{-x}\mu'^2)^s}$$

des deux variables s et x. De telles fonctions de s ne sont pas inconnues en analyse, mais ce qui fait leur importance pour la théorie arithmétique du corps K, c'est leur périodicité en x. En effet, puisque μ parcourt toute la suite des entiers du corps, $\varepsilon\mu$ parcourt aussi toute cette suite, par conséquent :

$$Z(s\,;\ x + 2\log\varepsilon) = Z(s\,;\ x)\ .$$

On peut donc développer Z en série de Fourier

$$Z(s\,;\ x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n\, e^{\frac{\pi i n}{\log \varepsilon} x}\ .$$

Il se trouve précisément que c_0 (à un facteur banal près) est $\zeta_k(s)$ et que les autres coefficients c_n sont liés simplement aux fonctions :

$$\zeta(s\,,\ \lambda_n) = \sum_{(\mu)} \frac{\lambda_n(\mu)}{|\,N(\mu)\,|^s} = \prod_{(\pi)} \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_n(\pi)}{|\,N(\pi)\,|^s}} \qquad (n = 0\,,\ 1\,,\ \ldots)$$

où

$$\lambda_n(\mu) = e^{\frac{\pi i n}{\log \varepsilon} \log\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|}\ ;$$

on voit que

$$\lambda_n(\varepsilon\mu) = \lambda_n(\mu)\ ; \qquad \lambda_n(\alpha\beta) = \lambda_n(\alpha)\,.\,\lambda_n(\beta)\ .$$

Cette suite infinie de fonctions est en quelque manière un équivalent de la fonction de deux variables $Z\,(s; x)$. Par suite de l'unicité de la décomposition d'un entier du corps en produit de facteurs premiers, on tire des faits précédents, le résultat suivant: *L'expression* $m^2 - 3\,n^2$ *représente une infinité de nombres premiers, même si l'on ne considère que les nombres* m, n *situés dans le plan des* m, n *à l'intérieur d'un angle de sommet* 0(0. 0) *et de valeur aussi petite que l'on veut.*

La représentation intégrale bien connue de $\Gamma\,(s)$ permet de passer à une autre fonction de 2 variables, qui n'est pas autre chose qu'une série théta à deux variables:

$$\vartheta(\tau\,,\ \tau') = \sum_{\mu} e^{\pi i (\tau\mu^2 + \tau'\mu'^2)}\ ,$$

la sommation étant étendue à tous les nombres entiers du corps; τ et τ' sont des variables complexes dont la partie imaginaire a un coefficient positif. La théorie des fonctions théta permet de déduire les propriétés d'invariance:

$$\vartheta(\varepsilon^2\tau\,,\ \varepsilon'^2\tau') = \vartheta(\tau\,,\ \tau')\,, \qquad \vartheta(\tau+\alpha\,,\ \tau'+\alpha') = \vartheta(\tau\,,\ \tau') \tag{1}$$

(pour tout entier α)

et

$$\vartheta^8\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\,,\ \frac{\alpha'\tau'+\beta'}{\gamma'\tau'+\delta'}\right) = (\gamma\tau+\delta)^4\,(\gamma'\tau'+\delta')^4\,\vartheta^8(\tau\,,\ \tau')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre entiers quelconques du corps, assujettis à satisfaire à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et à certaines congruences relatives au module 4.

Avec l'aide d'une formule particulière de l'espèce précédente, on peut démontrer que $Z(s; x)$ est prolongeable et l'on en tire une équation fonctionnelle pour cette même $Z(x; s)$; par suite, on en déduit des résultats analogues pour toutes les $\zeta(s, \lambda_n)$. Celles-ci sont, après multiplication par $(s - 1)$, des fonctions transcendantes entières de s.

Grâce à ces fonctions théta, nous avons réussi à atteindre le domaine des *fonctions modulaires à deux variables*. On en déduit des conclusions qui peuvent être considérées comme une généralisation de la théorie de la division du cercle, et de celle de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Si l'on n'a égard qu'à l'invariance suivant les équations (1), on arrive, par exemple, aux séries suivantes:

$$\varphi(\tau\,,\ \tau') = \sum_{\mu > 0} e^{\pi i(\tau\mu + \tau'\mu')}\,\mathrm{N}(\mu)^{k-1}$$

k étant un nombre fixe $\geqq 1$; la sommation ne porte que sur les entiers totalement positifs du corps c'est-à-dire sur ceux pour lesquels on a, à la fois $\mu > 0$, $\mu' > 0$. Ces fonctions représentent la véritable généralisation de la fonction exponentielle pour le cas de plusieurs variables; elles se décomposent en fractions rationnelles, pour ainsi dire:

$$\varphi(\tau\,,\ \tau') = \mathrm{A}(k)\sum_{\mu}\frac{1}{(\tau\sqrt{3}+\mu)^k\,(\tau'\sqrt{3}-\mu')^k}\,,$$

$\mathrm{A}(k)$ étant indépendant de τ et τ'; la sommation porte sur tous les entiers du corps. Cette équation correspond à la décomposition bien connue de $\cot \pi z$, $\dfrac{1}{\sin^2 \pi z}$, etc.... Mais alors que ces fonctions sont prolongeables dans tout le plan des z, les pôles et un point singulier essentiel mis à part, on constate que $\varphi(\tau, \tau')$ n'est définie que dans le domaine où τ et τ' ont des coefficients de $\sqrt{-1}$ positifs. Il est possible d'étudier l'allure de φ dans le voisinage des points (singuliers), frontières de ce domaine. En effet, puisque $\varphi(\varepsilon\tau, \varepsilon'\tau') = \varphi(\tau, \tau')$ on en déduit pour $\varphi(\tau e^x, \tau' e^{-x})$ un développement de Fourier d'après $e^{\frac{2\pi i x}{\log \varepsilon}}$, ce développement met alors en évidence l'allure de φ dans le voisinage de $\tau = \tau' = 0$; φ est infini comme $\frac{\text{const}}{\tau\tau'}$; des développements analogues sont valables dans le voisinage des points $\tau = \frac{\rho}{2\sqrt{3}}$, $\tau' = \frac{-\rho'}{2\sqrt{3}}$ où ρ est un non-entier du corps. Lorsqu'on s'approche de ces points φ ne devient infini que comme $\mathcal{C} \log\left(\tau - \frac{\rho}{2\sqrt{3}}\right)\left(\tau' + \frac{\rho'}{2\sqrt{3}}\right)$; ces facteurs $\mathcal{C}$ sont liés aux *nombres de classes de certains corps supérieurs.*

Pour le traitement analytique de la théorie additive des nombres dans $K(\sqrt{3})$, les fonctions φ forment le moyen le plus commode.

Enfin par une nouvelle sommation, les fonctions φ engendrent les fonctions modulaires et celles-ci donnent lieu à des représentations analogues aux *séries d'Einstein.* Par exemple, sommons par rapport à tous les μ entiers, et plus par rapport aux seuls nombres non associés $\varkappa (\varkappa \neq 0)$, dans l'expression:

$$f(\tau, \tau') = \sum_{(\varkappa)} \frac{1}{(\varkappa\varkappa')^k} + \sum_{(\varkappa)} \sum_{(\mu)} \frac{1}{(\varkappa\tau + \mu)^k (\varkappa'\tau' + \mu')^k}.$$

Pour une valeur entière de $\varkappa$ supérieure à 2, $f(\tau, \tau')$ est absolument convergente et l'on a:

$$f\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'}\right) = (\gamma\tau + \delta)^k (\gamma'\tau' + \delta')^k f(\tau, \tau')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers du corps de déterminant 1.

2. — CONFÉRENCE de M. Michel PLANCHEREL (Zurich): *Sur le passage à la limite des équations aux différences aux équations différentielles dans les problèmes aux limites de la physique mathématique.* — Le passage du discret au continu peut se faire en mécanique de deux manières différentes. Ou bien on effectue le passage à la limite sur les équations du mouvement; on est ainsi conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles que l'on regarde alors comme les équations du mouvement des milieux continus. Ou bien on effectue plus tard ce passage à la limite, à savoir sur les solutions du problème discret. Alors que la première manière est celle que les mathématiciens du XVIII$^{\text{me}}$ et du début du XIX$^{\text{me}}$ siècle ont souvent utilisée pour trouver les équations des milieux continus, la seconde a été entre les

mains de physiciens tels que lord Rayleigh un procédé heuristique puissant pour trouver les solutions des problèmes aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles, par exemple, l'existence d'une infinité de vibrations fondamentales et leurs propriétés. Tout naturellement la question se pose: est-ce que ces deux passages à la limite conduisent aux mêmes résultats? En d'autres termes: les petits mouvements d'un système continu autour d'une position d'équilibre peuvent-ils être envisagés comme cas limite des petits mouvements d'un système fini de points matériels?

Formulé mathématiquement dans le cas le plus simple, le problème est le suivant: Soit

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu + \lambda u = f(x) \tag{1}$$

$$u(o) = u(1) = 0 \tag{2}$$

un problème aux limites pour une équation adjointe à elle-même. On suppose $p(x) > 0$. Soit d'autre part

$$\frac{1}{h^2}\,\Delta\,(p_i\,\Delta\,u_{i-1}) + q_i u_i + \lambda\,u_i = f_i\ ,\quad i = 1,\,2,\,\ldots,\,n-1 \tag{3}$$

$$u_0 = u_n = 0 \tag{4}$$

le problème aux limites pour l'équation aux différences correspondante. Ici

$$h = \frac{1}{n}\,,\quad p_i = p\left(\frac{i}{n}\right),\quad q_i = q\left(\frac{i}{n}\right),\quad f_i = f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Peut-on affirmer que si n tendant vers l'infini et $\frac{i}{n}$ vers x, on a lim $u_i = u(x)$? Peut-on calculer les valeurs et les fonctions fondamentales de l'équation homogène correspondant à (1) comme limites des valeurs et des solutions fondamentales des équations homogènes correspondant à (3) ?

La réponse est affirmative et le but de la conférence était d'esquisser la méthode permettant de donner cette réponse.

Les étapes de la démonstration sont en gros les suivantes:

A. On introduit pour les équations aux différences (3) une expression jouant pour elles le même rôle que la fonction de Green de l'équation (1) et ayant des propriétés analogues.

B. On résoud directement le passage à la limite du problème

$$\frac{1}{h^2}\,\Delta^2 u_i = f_i\ ,\quad i = 1,\,2,\,\ldots,\,n-1 \tag{5}$$

$$u_0 = u_n = 0 \tag{6}$$

au problème
$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \tag{7}$$
$$u(0) = u\,(1) = 0. \tag{8}$$

C. On ramène ensuite la résolution de l'équation (1) sous les conditions (2) à celle d'une équation intégrale

$$u(x) + \int_0^1 \mathrm{K}\,(\lambda\,;\; x,\, y)\; u(y)\, dy = \mathrm{F}(x) \tag{9}$$

où K dépend de la fonction de Green de (7).

On ramène, d'une manière analogue, la résolution des équations (3) sous les conditions (4) à celle d'un système

$$u_i + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{K}_{ik}\, u_k = \mathrm{F}_i \tag{10}$$

où K_{ik} dépend de λ et de la fonction de Green de (5). De plus, lorsque n tend vers l'infini et lorsque

$$\frac{i}{n} \longrightarrow x\ , \quad \frac{k}{n} \longrightarrow y$$

$$lim\ \mathrm{K}_{ik} = \mathrm{K}\,(\lambda\,;\; x,\, y)\ , \quad lim\ \mathrm{F}_i = \mathrm{F}(x)$$

Les résultats classiques de M. Hilbert sur la résolution d'une équation intégrale par le passage à la limite d'un système d'équations algébriques permettent alors de conclure que la solution u_i de (10) converge vers la solution $u(x)$ de (9).

La méthode s'étend au cas des équations aux dérivées partielles. Dans l'étape B l'équation $\Delta\, u = f$ remplace tout naturellement l'équation (7). Mais le passage à la limite de B n'est plus aussi immédiat et demande une étude assez délicate. De même dans l'étape C, les noyaux qui se présentent ne sont plus bornés, ce qui exige quelques précautions nouvelles.

3. — Conférence de M. Blaschke. — *Chapitres choisis de géométrie différentielle.* — Le Conférencier expose les méthodes et les problèmes de la *géométrie différentielle affine*, c'est-à-dire de l'ensemble des questions qui se formulent au moyen d'expressions invariantes vis-à-vis des transformations affines (projectivités avec conservation du parallélisme). On se rend compte que l'on peut construire une géométrie différentielle invariante vis-à-vis de l'affinité, présentant une analogie remarquable et étroite avec la géométrie différentielle ordinaire; on y peut, par exemple, définir les notions de longueur d'arc, courbure et torsion, puis pour les surfaces courbes, les notions d'aire, de normale à la surface, de lignes de courbure, d'élément d'arc, etc.,

ces notions possédant entre elles les mêmes relations que les notions correspondantes de la géométrie ordinaire.

Comme exemple d'application de ces méthodes l'auteur a démontré les théorèmes suivants:

Chaque ovale a au moins six points possédant une conique osculatrice stationnaire.

Un corps convexe dont toutes les lignes de gravité sont rectilignes est nécessairement un ellipsoïde. Les lignes de gravité sont les courbes, lieux des centres de gravité de sections planes parallèles.

Enfin, l'auteur exposa les plus simples problèmes de variation de la géométrie affine (Intégrales simples et intégrales doubles avec ou sans conditions auxiliaires).

La bibliographie du sujet se compose des mémoires classés sous le titre de « Ueber affine Geometrie, I-XXV dans les *Leipziger Berichte* 1916-1919, XXVI à XXXII dans la *Mathematische Zeitschrift*, 1922, et XXIII à XXXVII dans les *Abhandlungen des math. Seminars der Hamburgischen Universität,* 1 (1922). Le deuxième volume des *Vorlesungen über Differentialgeometrie* du conférencier lui-même (Springer, Berlin, 1923) donnera un exposé synthétique de la question.

Communications.

1. — M. G. Polya (Zurich). — *Prolongement analytique.* — Je dirai qu'une fonction $f(z)$ est de « type normal » dans l'angle $\alpha \leqq \text{arc}\, z \leqq \beta$ si $f(z)$ est holomorphe dans cet angle et y satisfait à une inégalité de la forme $|f(z)| < Ae^{a|z|}$, A et a étant des constantes positives. Pour une fonction entière de type normal l'angle comprend le plan entier. Soit $g(z)$ une fonction entière de type normal. Je désignerai la fonction

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{lg\,|g(re^{i\varphi})|}{r}$$

de la variable réelle φ comme « l'indicateur » de $g(z)$.

1. L'indicateur est la « fonction caractéristique » (= Stützgeradenfunktion) d'une courbe convexe, dite la « figure adjointe » de $g(z)$, qui dans des cas particuliers peut se réduire à un polygone, à un segment de droite ou à un point.

2. Le prolongement analytique des séries

$$\bar{g}(0)\,w^{-1} + \bar{g}'(0)\,w^{-2} + \bar{g}''(0)\,w^{-3} + \ldots = \mathcal{B}(w)$$

$$\bar{g}(0)\,e^{-w} + \bar{g}(1)\,e^{-2w} + \bar{g}(2)\,e^{-3w} + \ldots = \mathcal{C}(w)$$

$$\bar{g}(lg1)\,1^{-1-w} + \bar{g}(lg2)\,2^{-1-w} + \bar{g}(lg2)\,3^{-1-w} + \ldots = \mathcal{D}(w)$$

est holomorphe et uniforme à l'extérieur de la figure adjointe de $g(z)$ mais a un point singulier sur chaque droite qui s'appuie sur cette figure (chaque « Stützgerade »). Dans le cas des séries $\mathcal{B}(w)$ et $\mathcal{D}(w)$