

# § 3. — Forme générale de la surface. — Ombilics.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

15. — On appelle *symbole de symétrie* d'un polyèdre, un tableau comprenant l'indication de tous ses éléments de symétrie.

16. — Le symbole de symétrie du tétraèdre régulier est donc :

$$4\Lambda^3, \quad 3\Lambda^2, \quad 6P.$$

### § 3. — Forme générale de la surface. — Ombilics.

17. — Nous allons étudier le lieu géométrique des points dont les distances à trois plans fixes rectangulaires ont un produit constant. C'est une surface ayant pour équation :

$$xyz = p^3.$$

Nous pouvons supposer  $p > 0$ , car, si  $p$  était  $< 0$ , on changerait le sens de l'un des axes.

La surface ne rencontre ni les axes ni les plans coordonnés, à distance finie. Elle ne pénètre dans aucun des trièdres suivants :  $x'yz$ ,  $xy'z$ ,  $xyz'$ ,  $x'y'z'$ , dans chacun desquels le produit des coordonnées est négatif.

On peut immédiatement trouver quatre points de la surface :  $(+p, +p, +p)$  ;  $(+p, -p, -p)$  ;  $(-p, +p, -p)$  ;  $(-p, -p, +p)$ . Ce sont les quatre points A, B, C, D, sommets d'un tétraèdre régulier, dont le centre de gravité se trouve à l'origine des coordonnées.

La surface  $xyz = p^3$  se compose donc de quatre nappes indéfinies, asymptotes aux plans coordonnés.

Son équation ne change pas quand on remplace  $xyz$  par  $yxz$ ,  $zyx$ ,  $xzy$ ,  $\overline{xy}z$ ,  $\overline{xy}\overline{z}$ , etc. La surface admet six plans de symétrie, qui sont les mêmes que ceux du tétraèdre ABCD.

On démontre, en cristallographie, que l'intersection de  $n$  plans de symétrie est un  $\Lambda^n$ . Il en résulte que la surface, dont nous

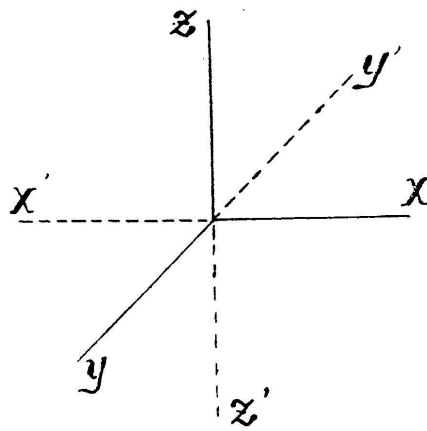


Fig. 3.

nous occupons, possède exactement la même symétrie cristallo-graphique qu'un tétraèdre régulier. Les axes ternaires ont pour équations:

$$x = \pm y = \pm z ;$$

les doubles signes sont indépendants.

18. — Dans la suite, le tétraèdre ABCD va jouer un rôle important. On peut aisément trouver les équations de ses quatre faces:

$$\begin{aligned} \text{BCD} : & \quad x + y + z = -p ; \\ \text{CDA} : & \quad -x + y + z = p ; \\ \text{DAB} : & \quad x - y + z = p , \\ \text{ABC} : & \quad x + y - z = p . \end{aligned}$$

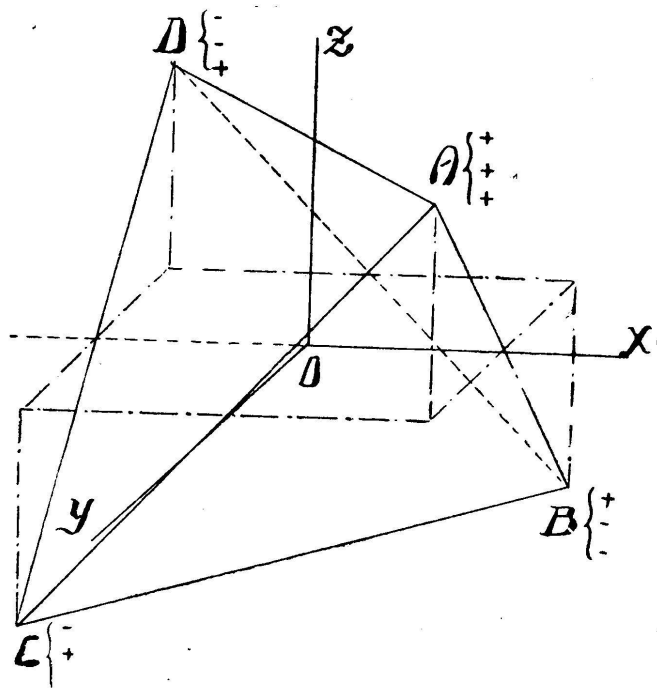


Fig. 4.

19. — Sur une surface, considérons un point ordinaire, c'est-à-dire un point pour lequel le plan tangent est parfaitement déterminé. La perpendiculaire menée au plan tangent, par le point de contact, s'appelle normale.

Par cette normale faisons passer un plan quelconque ; il va déterminer, dans la surface, une « section plane normale » laquelle possède, au point considéré, une courbure bien déterminée.

Faisons tourner le plan sécant: la courbure variera d'une manière continue. Euler a démontré que la courbure restait comprise entre un maximum et un minimum, et que les sections normales, correspondant au maximum et au minimum, étaient perpendiculaires l'une sur l'autre. Ces deux sections sont dites principales.

Depuis Monge, on appelle « ombilic » un point autour duquel la courbure est la même dans toutes les directions.

Si, en un point d'une surface, le plan tangent n'est pas bien déterminé, ce point est dit singulier. Le sommet d'un cône quelconque est toujours un point singulier.

20. — Pour la surface que nous considérons, les points A, B, C, D sont des ombilics. Il est facile de s'assurer que les

plans tangents y ont pour équations respectives :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3p ; \\ x - y - z &= 3p ; \\ -x + y - z &= 3p ; \\ -x - y + z &= 3p . \end{aligned}$$

Ces quatre points ne sont donc pas singuliers.

D'autre part, la présence d'un  $\Lambda^3$  est incompatible avec l'existence de deux sections principales perpendiculaires entre elles. Ces points sont donc des ombilics.

Au polyèdre ABCD, nous donnerons le nom de tétraèdre ombilical.

21. — D'une manière plus générale, nous énoncerons la proposition suivante :

THÉORÈME: *Quand une surface est rencontrée par un axe de symétrie d'ordre supérieur à deux, chaque point d'intersection est un point singulier, ou bien un ombilic.*

22. — Nous pouvons, d'ailleurs, chercher les ombilics par l'analyse. On démontre que les coordonnées d'un tel point vérifient les équations :

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} .$$

Dans le cas actuel, nous avons :

$$\begin{aligned} xyz &= p^3 ; \\ z &= \frac{p^3}{xy} ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{p^3}{x^2 y} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{p^3}{xy^2} ; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2p^3}{x^3 y} ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{p^3}{x^2 y^2} ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2p^3}{xy^3} . \end{aligned}$$

Les équations aux coordonnées des ombilics deviennent alors :

$$\frac{\frac{2}{x^3 y}}{1 + \frac{p^6}{x^4 y^2}} = \frac{\frac{1}{x^2 y^2}}{\frac{p^6}{x^3 y^3}} = \frac{\frac{2}{xy^3}}{1 + \frac{p^6}{x^2 y^4}} ,$$

ou bien :

$$\frac{2xy}{x^4 y^2 + p^6} = \frac{xy}{p^6} = \frac{2xy}{x^2 y^4 + p^6} .$$

On peut en déduire:

$$x^4 y^2 = x^2 y^4 = p^6, \quad (\text{E})$$

puis:

$$x^6 y^6 = p^{12},$$

d'où:

$$xy = \pm p^2,$$

et, par conséquent:

$$z = \pm p.$$

De la première équation (E), on tire encore:

$$x^2 = y^2, \quad \text{c'est-à-dire : } x = \pm y = \pm p, \quad \text{c. q. f. d.}$$

23. — Pour mettre complètement en évidence la symétrie tétraédrique de la surface, nous allons rapporter cette dernière au tétraèdre ombilical (20) comme tétraèdre de référence.

D'un point quelconque de l'espace, nous abaisserons des perpendiculaires sur les quatre faces de ce tétraèdre; nous représenterons ces perpendiculaires par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ; nous les prendrons pour coordonnées tétraédriques du point; nous choisirons les signes de telle façon qu'un point, pris à l'intérieur du tétraèdre, ait ses quatre coordonnées positives.

Les équations des quatre faces sont connues (18); les distances d'un point quelconque de l'espace à ces faces, sont:

$$\begin{aligned} \alpha &= (x + y + z + p) : \sqrt{3}, \\ \beta &= (-x + y + z - p) : (-\sqrt{3}), \\ \gamma &= (x - y + z - p) : (-\sqrt{3}), \\ \delta &= (x + y - z - p) : (-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

De ces quatre équations, l'on déduit:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= \alpha \sqrt{3} - p, \\ -x + y + z &= -\beta \sqrt{3} + p, \\ x - y + z &= -\gamma \sqrt{3} + p, \\ x + y - z &= -\delta \sqrt{3} + p. \end{aligned} \right\} \quad (\text{F})$$

De la somme des trois dernières équations (F) retranchons la première; il vient:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \sqrt{3} = 4p, \quad (\text{G})$$

ce qui prouve que les quatre coordonnées tétraédriques d'un même point ne sont pas indépendantes. Du reste, il est facile de montrer, *a priori*, que leur somme est égale à la hauteur du tétraèdre de référence. La hauteur de ce tétraèdre est donc :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{4}{3}p\sqrt{3} .$$

Si, de la première équation (F), on retranche, successivement, chacune des trois autres, on obtient :

$$2x = (\alpha + \beta)\sqrt{3} - 2p ,$$

$$2y = (\alpha + \gamma)\sqrt{3} - 2p ,$$

$$2z = (\alpha + \delta)\sqrt{3} - 2p .$$

Si l'on tient compte de l'équation (G), on trouve :

$$\left. \begin{aligned} 4x &= (\alpha + \beta - \gamma - \delta)\sqrt{3} , \\ 4y &= (\alpha - \beta + \gamma - \delta)\sqrt{3} , \\ 4z &= (\alpha - \beta - \gamma + \delta)\sqrt{3} . \end{aligned} \right\} \quad (\text{H})$$

24. — Si le point  $(x, y, z)$  doit appartenir à la surface que nous étudions, ses coordonnées doivent vérifier l'équation :  $xyz = p^3$ . En multipliant les équations (H) membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{64p^3}{\sqrt{27}} &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 - \alpha\beta(\alpha + \beta) - \alpha\gamma(\alpha + \gamma) \\ &\quad - \alpha\delta(\alpha + \delta) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \beta\delta(\beta + \delta) - \gamma\delta(\gamma + \delta) \\ &\quad + 2(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) . \end{aligned}$$

Mais, d'après l'équation (G) du numéro précédent, on a :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{4p}{\sqrt{3}} .$$

L'équation de la surface peut donc s'écrire :

$$\Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\Sigma\alpha\beta\gamma = \Sigma\alpha^3 - \Sigma\alpha^2\beta + 2\Sigma\alpha\beta\gamma .$$

On en conclut :

$$4(\Sigma\alpha^2\beta + \Sigma\alpha\beta\gamma) = 0 .$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \alpha\delta(\alpha + \delta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \beta\delta(\beta + \delta) \\ + \gamma\delta(\gamma + \delta) + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 0 . \end{aligned}$$

De cette dernière équation, il résulte:

1° que la surface admet la symétrie cristallographique du tétraèdre régulier;

2° qu'elle ne pénètre pas à l'intérieur du tétraèdre ombilical.

#### § 4. — Sections planes.

25. — Tout plan, parallèle à l'un des plans coordonnés, coupe la surface suivant une hyperbole équilatère. En effet, les deux équations:

$$xyz = p^3, \quad z = c,$$

entraînent:

$$xy = \frac{p^3}{c}.$$

26. — Tout plan passant par l'un des axes coordonnés, coupe la surface suivant une cubique cuspidale (1). Car les deux équations:

$$xyz = p^3, \quad y = tx,$$

entraînent:

$$tx^2z = p^3,$$

ou

$$x^2z = a^3.$$

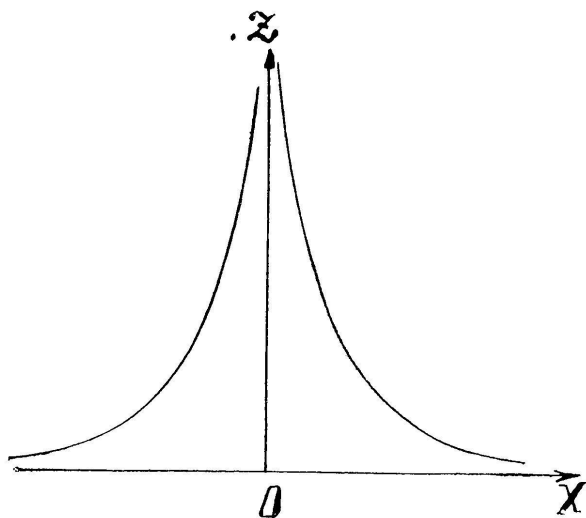


Fig. 5.

C'est une cubique  $[5^0, c]$  dont le rebroussement se trouve à l'infini. Cette cubique est formée de deux branches, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des  $z$ .

La constante  $a^3$  a le même signe que  $t$ . La courbe rencontre les bissectrices des angles que font les axes coordonnés, aux points:

$$\pm x = z = a.$$

En ces points, les tangentes ont, pour coefficients angulaires:

$$\left[ -\frac{2xz}{x^2} \right]_x = \mp 2.$$