

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Paul Lévy. – Leçon d'analyse fonctionnelle, professées au Collège de France (collection de monographie sur la théorie des fonctions). Préface de M. J.-H. Hadamard. — 1 vol. in-8°, vi + 442 p.; 35 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1922.

Autor: Wavre, Rolin

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 24.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Paul LÉVY. — **Leçon d'analyse fonctionnelle**, professées au Collège de France (collection de monographie sur la théorie des fonctions). Préface de M. J.-H. HADAMARD. — 1 vol. in-8°, vi + 442 p.; 35 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1922.

Au début de ce siècle, les analystes fondaient une grande espérance sur la notion de fonction de ligne, introduite dans la science par M. Volterra et sur ses développements qui constituent le calcul fonctionnel. Il semblait que de cette notion on pût dégager, un jour, le plus puissant instrument de l'analyse.

Malgré cela, aujourd'hui encore, ceux qui ont fait du calcul fonctionnel leur spécialité sont très peu nombreux. M. Paul Lévy fut presque seul à tenir le flambeau, ces dernières années, en développant l'analyse fonctionnelle pour elle-même et dans le sens d'une généralisation du calcul infinitésimal. Nous ne saurions faire la part assez grande aussi à l'école de M. Fréchet, mais elle est dirigée plus spécialement vers la partie abstraite de cette nouvelle discipline. Mentionnons aussi M. Gateaux, mort à la guerre en septembre 1914, à qui l'on doit quelques-unes des notions les plus profondes et les plus originales.

Si l'on a pu comparer le calcul fonctionnel à la montagne qui accouche d'une souris, nous estimons que le livre si riche d'idées fécondes et suggestives en même temps que de résultats cristallisés et désormais classiques, que M. Paul Lévy publie aujourd'hui, contribuera à augmenter l'intérêt que l'on porte à ces questions et fera peut-être renaître, plus éprouvée, la grande espérance d'autrefois.

Il faut distinguer deux domaines dans le calcul fonctionnel.

Une fonction de lignes est un nombre dont la valeur dépend de toutes les valeurs d'une fonction appelée argument, ce nombre variant en général lorsqu'on fait varier l'argument. L'exemple le plus simple de fonction de ligne, ou de fonctionnelle est l'intégrale définie.

Dans l'étude des fonctions de points $f(x)$, on néglige habituellement l'étude du champ de variabilité de la variable indépendante, car dans les cas ordinaires, celui-ci se réduit à un intervalle et il n'y a rien de plus simple. Mais, lorsqu'il s'agit d'une fonction de lignes, les choses se présentent différemment et le premier domaine qui est ouvert au calcul fonctionnel est l'étude des ensembles de fonctions ou de lignes et des caractères de continuité ou de discontinuité de la fonctionnelle définie sur ces ensembles.

Cette étude a été entreprise par MM. Arzela, Hilbert, Montel et surtout, d'un point de vue plus systématique et abstrait par M. Fréchet. M. Tonelli a réuni les propriétés essentielles de ces ensembles dans son livre *Fundamenti del calcolo delle variazioni* dont nous avons dit un mot dans une notice précédente.

Le second domaine est l'extension aux fonctionnelles des notions de dérivation, d'équation différentielle et, après elles, de tout le calcul infinitésimal.

D'importants résultats ont été obtenus dans cette voie.

M. Hadamard, dans ses *Leçons sur le calcul des variations*, M. Volterra dans ses *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm*, puis dans deux monographies de la collection Borel *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégral-différentielles* et *Leçons sur les fonctions de ligne*; M. Paul Lévy, lui-même, dans sa thèse et dans différents mémoires parus dans les

Rendiconti del circolo matematico di Palermo avaient déjà introduit la notion de dérivée fonctionnelle et d'équations aux dérivées fonctionnelles qui généralise la notion d'équation différentielle. Ces différents auteurs ont spécialement approfondi les questions d'analyse fonctionnelle en rapport avec des problèmes classiques de physique mathématique.

C'est ce second domaine qu'explore le jeune professeur de l'École polytechnique de Paris dans ses leçons d'analyse fonctionnelle et cela par intérêt purement analytique.

Dans ce vaste champ, M. Volterra et M. Hadamard ont cueilli quelques fleurs d'un remarquable éclat; l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles, à laquelle conduit le problème de Dirichlet, l'expression de la variation de la fonction de Green et l'équation d'Hadamard, la représentation d'une fonctionnelle linéaire par une limite d'intégrale, constituent des résultats, on ne peut plus élégants, propres à encourager les chercheurs.

Le livre actuel contient une foule de questions nouvelles. M. Paul Lévy a plus d'une fois proclamé que tout chapitre de l'analyse a sa généralisation dans le calcul fonctionnel. Ce sont quelques-unes de ces généralisations qu'il a développées.

Il s'est donc placé sur un terrain plus général, parfois entièrement nouveau, et a procédé d'une manière plus systématique que M. Volterra en particulier.

Un exposé complet de l'analyse fonctionnelle devrait contenir la théorie des fonctions à une infinité de variables, des formes quadratiques à une infinité de dimensions et des équations intégrales, ainsi que tout le calcul des variations. Mais ce sont là des enfants émancipés et pour ainsi dire détronqués. M. Lévy a dû se restreindre à ce qui procède de l'idée de fonction de ligne dans ce qu'elle a de plus pur.

Il étudie différentes formes de continuité d'une fonctionnelle, puis les représentations générales d'une fonctionnelle continue, qui généralisent le développement en série de polynômes données par MM. Hadamard, Frechet et Riesz.

Puis il aborde l'étude de la dérivation d'une fonctionnelle et de l'intégration de différents types d'équations aux dérivées fonctionnelles du premier ordre et parvient à la généralisation des notions d'intégrale complète, de caractéristique et de la méthode d'intégration de Cauchy.

M. Lévy avait déjà introduit dans sa thèse (1910) la notion d'équation complètement intégrale qui jette une vive lumière sur ces questions difficiles.

Mentionnons en passant une généralisation des équations de Jacobi-Hamilton dont s'était occupé déjà M. Prange.

Enfin, plusieurs chapitres sont consacrés à l'étude des équations aux dérivées fonctionnelles partielles du second ordre, d'une équation généralisant celle de Laplace et des fonctionnelles harmoniques. Cette étude introduit une formule qui généralise celle de Green et nécessite la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel, laquelle, comme l'a montré Gateaux, doit se ramener à celle de moyenne. Comme le fait remarquer l'auteur, tandis que, jusqu'ici, l'analyse fonctionnelle présentait avec l'analyse ordinaire une analogie remarquable, la théorie de la moyenne en calcul fonctionnel est quelque chose d'essentiellement nouveau.

L'étude de ce livre exige des connaissances très étendues.

M. Lévy a, autant que possible, rappelé sommairement les notions qui

sont indispensables pour épargner le temps des lecteurs qui pénétreraient dans ce vaste champ pour la première fois ; notamment les notions d'intégrales de Lebesgue et de Stieltjes.

L'analyse fonctionnelle est en plein défrichage. M. Lévy à qui l'on doit, avec M. Gateaux, les principaux résultats et les idées les plus suggestives et les plus profondes dans ce domaine, laisse de nombreuses questions inachevées. Il y a là matière à des recherches qui pourraient être très fructueuses. Ceux qui s'y sont spécialisés sont rares. Mais nous croyons que la publication de ce livre, impatientement attendue, engagera quelques jeunes mathématiciens à suivre cette voie, en même temps qu'elle facilitera et systématisera leurs recherches.

Rolin WAVRE (Genève).

Ch.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN. — **Cours d'analyse infinitésimale.** — Quatrième édition ; 2 vol. in-8°. Tome I, IX + 434 p., 1921 ; tome II, XII + 478 p., 1922 ; A. Uystpruyst-Dieudonné, Louvain ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Il serait superflu de rappeler l'importance et l'utilité, pour ceux qui étudient ou enseignent le calcul infinitésimal, du cours d'analyse de l'éminent mathématicien belge. La troisième édition, presque achevée, a disparu dans les flammes à Louvain en août 1914. Elle contenait une contribution personnelle étendue à la théorie des ensembles et de l'intégrale de Lebesgue. Depuis lors, M. de la Vallée-Poussin a publié ses recherches sur ce sujet dans son ouvrage : « Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire » (Paris, Gauthier-Villars, 1916). Ces questions, ainsi que celles traitées en petit texte dans l'ancienne édition, ne figurent plus dans la nouvelle. Souhaitons qu'elles puissent prendre place, avec d'autres, comme l'auteur l'espère dans un troisième volume de la présente édition.

Un progrès essentiel, réalisé en mathématique pure durant ces dernières années, a consisté à réduire au minimum les suppositions que l'on doit faire sur un être mathématique, pour pouvoir lui attribuer telle propriété, qu'on lui reconnaît dans un cas particulier. S'il est plus simple de faire dans une démonstration quelques hypothèses surabondantes, sur l'être que l'on étudie, pour énoncer une proposition, il est, par contre, plus logique de réduire ces hypothèses autant que possible, pour atteindre à un plus haut degré de généralité. Une telle méthode, avare d'hypothèses, montre, en plus, la charpente d'une théorie, la manière dont les propositions s'emboîtent les unes dans les autres. Cette préoccupation se retrouve dans de nombreux chapitres de ce cours, notamment, au début, dans l'étude des fonctions continues, des conditions de dérivation et de différentiation des fonctions explicitement ou implicitement définies. C'est ainsi, par exemple, que l'auteur donne le théorème d'existence des fonctions implicites sous la forme générale de M. Young. Au même point de vue, les théorèmes d'existence des équations différentielles et les propriétés des intégrales envisagées dans un système donné, et comme fonctions des valeurs initiales ou de certains paramètres sont traités avec plus de soin qu'on ne le fait d'ordinaire. Si M. de la Vallée-Poussin n'a pas abordé, dans ce cours, l'étude des fonctions analytiques, des travaux de Cauchy, Riemann et Weierstrass, c'est au bénéfice d'une étude plus détaillée et plus minutieuse du domaine réel. Mentionnons, sans avoir la prétention d'être complet dans notre analyse, certains chapitres dont l'étude est spécialement approfondie.