Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE
Autor: Niewenglowski, B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515728

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

---

1. — Le rayon de courbure d'une conique en un point M est donné par la formule

$$R = \frac{N^3}{p^2}, \tag{1}$$

p désignant le paramètre de la courbe et N la longueur du segment MN de la normale en M, N étant sa trace sur un axe de symétrie de la conique.

Plus généralement, s'il s'agit d'une courbe plane quelconque, en gardant les mêmes notations, on a

$$N^2 = y^2(1 + y'^2),$$

d'où il suit que

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{N^3}{y^3},$$

et par conséquent

$$R = \frac{N^3}{|y^3 y''|}. \tag{2}$$

La formule (1) se déduit d'ailleurs très simplement de (2) si l'on prend pour axe des x un axe de symétrie de la conique considérée, l'origine étant l'un des sommets situés sur cet axe. En effet, l'équation de la conique étant alors

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

on a successivement

$$yy' = p + qx, \qquad y'^2 + yy'' = q, \qquad y^2y'^2 + y^3y'' = qy^2,$$

$$y^3y'' = q(2px + qx^2) - (p + qx)^2 = -p^2,$$

$$|y^3y''| = p^2.$$

2. — *Remarque I.* L'équation (1) caractérise les coniques. En effet, si cette équation est vérifiée on a

$$y^3 y'' = a \ ,$$

a désignant une constante. On en tire successivement

$$y' dy' = a \frac{dy}{y^3} \ , \qquad y'^2 = b - \frac{a}{y^2}$$

b étant une nouvelle constante, et ensuite

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{by^2 - a}}$$

et enfin

$$(x + c)^2 = by^2 - a$$

c étant encore une constante.

3. — *Remarque II.* Le cas de l'hyperbole équilatère mérite d'être signalé. En prenant pour axes de coordonnées les axes de symétrie, l'équation peut s'écrire

$$x^2 - y^2 = a^2$$

ce qui donne $yy' = x$; alors $N^2 = y^2 + x^2 = r^2$, r désignant la distance du point M (x, y) au centre et dans ce cas: $R = \frac{r^3}{a^2}$.

4. — *Cas où l'on prend pour variable indépendante l'arc* s *de la courbe plane que l'on étudie.* Dans ce cas la relation entre le rayon de courbure R et la normale N prend un autre aspect.

Les axes de coordonnées étant toujours supposés rectangulaires, si α désigne l'angle de la tangente en M (x, y) avec l'axe $x'x$, on sait que

$$x' = \cos\alpha \ , \qquad y' = \sin\alpha \ ,$$

d'où

$$x'' = -\sin\alpha . \alpha' \ , \qquad y'' = \cos\alpha . \alpha' \ , \qquad \text{et} \qquad \alpha' = \frac{1}{R} \ ,$$

les dérivées $x', y', \alpha', x'', y''$ étant prises par rapport à s.

On en déduit

$$R = \frac{x'}{y''} = -\frac{y'}{x''} \ . \tag{3}$$

D'autre part

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = \frac{y}{x'}, \qquad \text{donc} \qquad R = \frac{y}{y''N}$$

au signe près; ou plus correctement

$$R = \left|\frac{y}{y''}\right| \times \frac{1}{N}. \tag{4}$$

Pareillement si N′ désigne la longueur de la normale comptée jusqu'à l'axe du y, on trouvera

$$R = \left|\frac{x}{x''}\right| \times \frac{1}{N'}. \tag{4'}$$

5. — Applications. *Courbes telles que* $R = \pm N$.

1° Posons, en premier lieu

$$\frac{x'}{y''} = \frac{y}{x'}, \qquad \text{ou} \qquad x'^2 = yy''.$$

Mais puisque s est la variable indépendante, on sait que

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

donc

$$yy'' + y'^2 = 1;$$

une première intégration donne

$$yy' = s + h,$$

h étant une constante. En changeant l'origine des arcs par la courbe, on peut supprimer h et écrire

$$yy' = s$$

d'où l'on tire

$$y^2 = s^2 + a^2$$

a désignant la valeur de y pour $s = o$.

On en tire

$$y' = \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{x'}{a} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

ce qui donne, en supposant $x = o$ pour $s = o$ (ce qui est permis car une translation parallèle à $x'x$ ne change ni R ni N):

$$\sqrt{s^2 + a^2} + s = ae^{\frac{x}{a}}, \qquad \sqrt{s^2 + a^2} - s = ae^{-\frac{x}{a}}.$$

On en tire

$$s = a \operatorname{Sh} \frac{x}{a}$$

et par conséquent

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a} .$$

La courbe est une chaînette.

2° Posons maintenant

$$\frac{y'}{x''} = \frac{y}{x'} , \qquad \text{ce qui peut s'écrire} \qquad \frac{x''}{x'} = \frac{y'}{y} ,$$

d'où

$$x' = \frac{y}{a} ,$$

a désignant une constante arbitraire on a ainsi

$$1 - y'^2 = \frac{y^2}{a^2} .$$

Mais si l'on pose $x' = \sin t$, $y' = \cos t$ on en tire: $y = a \sin t$ donc

$$y' = a \cos t \frac{dt}{ds} \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{ds}{dt} = a$$

en prenant convenablement l'origine des arcs on peut donc poser $t = \frac{s}{a}$ et l'on a

$$y = a \sin \frac{s}{a}$$

$$x' = \sin \frac{s}{a} , \qquad \text{donc} \qquad x = - a \cos \frac{s}{a} + x_0 ,$$

et enfin

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2 ,$$

solution évidente a priori.

6. — *Courbes telles que* $R = \pm 2N$.

1° Posons tout d'abord

$$\frac{y'}{x''} = 2 \frac{y}{x'} , \qquad \text{ou} \qquad 2 \frac{x''}{x'} = \frac{y'}{y}$$

on en tire

$$x'^2 = 1 - y'^2 = \frac{y}{a} ,$$

a étant une constante arbitraire.

La dernière équation pouvant s'écrire ainsi:

$$\frac{y}{a} + y'^2 = 1$$

posons

$$\frac{y}{a} = \sin^2 \frac{1}{2} t \qquad \text{d'où} \qquad y' = \cos \frac{1}{2} t \ .$$

On en déduit

$$dy = a \sin \frac{1}{2} t \cos \frac{1}{2} t . dt \ .$$

Mais

$$dy = y' ds = \cos \frac{1}{2} t . ds$$

ce qui entraîne cette conséquence:

$$ds = a \sin \frac{1}{2} t . dt \ .$$

Mais

$$x'^2 = 1 - y'^2 = \sin^2 \frac{1}{2} t \ .$$

On peut prendre

$$x' = \frac{dx}{ds} = \sin \frac{1}{2} t \ ,$$

donc

$$dx = \sin \frac{1}{2} t \, ds = a \sin^2 \frac{1}{2} t . dt \ .$$

En intégrant on obtient

$$x = \frac{a}{2} (t - \sin t) + x_0$$

et l'on a déjà

$$y = \frac{a}{2} (1 - \cos t) \ .$$

La courbe cherchée est donc une cycloïde.

2° Soit maintenant

$$\frac{y'}{x''} = - 2 \frac{y}{x'} \ , \qquad \text{ou} \qquad 2 \frac{x''}{x'} + \frac{y'}{y} = 0 \ .$$

On a ainsi

$$x'^2 = \frac{a}{y}$$

a désignant une constante arbitraire.

On a donc

$$1 - y'^2 = \frac{a}{y} .$$

En posant $x' = \cos\varphi$, $y' = \sin\varphi$ on en déduit

$$y = \frac{a}{\cos^2\varphi} . \tag{5}$$

$$dy = \frac{2a\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\,d\varphi = \sin\varphi\, ds$$

donc

$$ds = \frac{2a\,d\varphi}{\cos^3\varphi} \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{2a\,d\varphi}{\cos^2\varphi} ,$$

donc enfin

$$x = 2a\,\mathrm{tg}\,\varphi + x_0 . \tag{6}$$

En éliminant φ entre les équations (5) et (6), on trouve

$$y = a + \frac{(x - x_0)^2}{4a}$$

équation d'une parabole.

7. — Extension a l'Espace. Nous commencerons par la formule (4). Nous prendrons trois axes rectangulaires et nous appellerons N la longueur MN comprise entre le point M et le point N où la *normale principale* relative à M perce le plan *xoy*.

Les équations de la normale principale étant

$$\frac{X - x}{s'x'' - x's''} = \frac{Y - y}{s'y'' - y's''} = \frac{Z - z}{s'z'' - z's''} .$$

On en déduit aisément

$$N^2 = \frac{z^2}{(s'z'' - z's'')^2}\left[(s'x'' - x's'')^2 + (s'y'' - y's'')^2 + (s'z'' - z's'')^2\right] .$$

Mais le crochet a pour valeur

$$s'^2[x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2] , \quad \text{donc} \quad N^2 = \frac{z^2 s'^2[x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2]}{(s'z'' - z's'')^2} .$$

D'autre part

$$R^2 = \frac{s'^4}{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2} .$$

On en conclut que

$$R = \left|\frac{zs'^3}{(s'z'' - z's'')\,N}\right| . \tag{7}$$

La variable indépendante est arbitraire — choisissons l'axe s pour paramètre — il vient, puisqu'alors $s' = 1$, $s'' = 0$:

$$R = \left|\frac{z}{z''N}\right| . \tag{8}$$

Pour obtenir une relation analogue à la formule (2), on peut procéder de la manière suivante:

La normale principale peut être définie comme étant l'intersection du plan osculateur et du plan normal relatifs au point M. Les dérivées étant prises par rapport à un paramètre arbitraire t, si l'on pose

$$A = y'z'' - z'y'' \qquad B = z'x'' - x'z'' \qquad C = x'y'' - y'x'' ,$$

on reconnaît que les équations de la normale principale peuvent s'écrire ainsi:

$$\frac{X - x}{Bz' - Cy'} = \frac{Y - y}{Cx' - Az'} = \frac{Z - z}{Ay' - Bx'} ,$$

et par suite:

$$N^2 = \frac{z^2}{(Ay' - Bx')^2}\left[(Bz' - Cy')^2 + (Cx' - Az')^2 + (Ay' - Bx')^2\right] .$$

Mais

$$(A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (Ax' + By' + Cz')^2 + (Bz' - Cy')^2 + (Cx' - Ax')^2 + (Ay' - Bx')^2 ,$$

et si l'on remarque que

$$Ax' + By' + Cz' = 0 \qquad \text{et} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2 ,$$

on voit que

$$N^2 = \frac{z^2 s'^2 [A^2 + B^2 + C^2)}{(Ay' - Bz')^2} .$$

D'autre part

$$R = \frac{s'^3}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

donc

$$R = \left|\frac{(Ay' - Bx')^3}{z^3}\right| \frac{N^3}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} . \tag{9}$$

Remarque. — Si dans la formule (9) on suppose $y \equiv o$, ce qui revient à dire que la courbe est plane et tracée dans le plan des yz, on a dans ce cas $y' = 0$, $y'' = 0$, par suite $A = 0$ $C = 0$ et la formule se réduit à

$$R = \left| \frac{x'^3}{z^3(z'x'' - x'z'')} \right| N^3 ,$$

formule qui coïncide avec la formule (2) si $x' = 1$, $x'' = 0$ z remplaçant y.

Pareillement si l'on suppose la courbe plane et tracée dans le plan des x, y la formule (7) donnera

$$R = \left| \frac{ys'^3}{s'y'' - y's''} \right| \times \frac{1}{N} ,$$

qui coïncide avec la formule (4) quand $s' = 1$, $s'' = 0$.

Application. On peut mettre les équations d'une hélice circulaire dont l'axe est pris pour axe des x, sous la forme

$$y = a \cos \frac{s}{b} , \qquad z = a \sin \frac{s}{b} , \qquad x = \frac{hs}{2\pi b} .$$

où $b = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$, a étant le rayon de la section droite du cylindre sur lequel l'hélice est tracée et h le pas de cette hélice. On trouve alors $N = a$, et puisque $\frac{z}{z''} = - b^2$

$$R = \frac{b^2}{a} = a + \frac{h^2}{4\pi^2 a} .$$