E. Cartan. — Leçons sur les Invariants intégraux. Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. gr, in-8° de X-210 pages; 20 frs. ; J. Hermann, Paris, 1922.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Brunschwieg à une critique kantienne convenablement élargie et adaptée au progrès des sciences.

Dans l'analytique transcendantale Kant montre que le principe de causalité ne peut être formulé que corrélativement à un principe de permanence, conservation de la substance ou de l'énergie, lequel a sa source dans l'esprit-même. Mais le principe de causalité n'est pas purement *a priori*. Il doit au travers de l'intuition pure du temps rejoindre l'expérience du concret laquelle apporte de son côté le principe de changement de succession et d'irréversibilité sans lequel il n'aurait aucun sens.

C'est cette continuelle influence de l'esprit sur la nature et de la nature sur l'esprit qui forme le développement de la pensée scientifique. Toute théorie scientifique nous dévoile la pensée aussi bien que la nature ou mieux elle nous dévoile une élaboration de l'une par l'autre.

C'est là, que M. Brunschwieg cherche l'inspiration d'un idéalisme relativiste qui apparaît comme un élargissement de la critique kantienne.

Cette attitude ne le conduit plus, à proprement parler à une philosophie scientifique, mais plutôt à une philosophie de la pensée, qu'il tente de rapprocher dans ses dernières pages de l'humanisme socratique.

Ce livre est plus que cela pour nous. Il contient quelques-unes des plus belles études que l'on ait faites sur l'histoire des mathématiques et de la physique en relation avec l'histoire de la philosophie. Mentionnons spécialement les chapitres consacrés à la relativité einsteinienne, dont M. Brunschwieg paraît avoir compris merveilleusement la portée et la signification philosophique.

Dans cette analyse reflexive de la pensée mathématique, qui n'est pas une simple histoire des sciences physico-mathématiques, faite d'un point de vue si large et si humain, sans aucune idée préconçue et indépendamment de toute conception philosophique arrêtée, les savants trouveront peut-être des idées suggestives conduisant à de nouveaux modes de rationnalité.

Rolin Wavre (Genève).

E. Cartan. — **Leçons sur les Invariants intégraux.** Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. gr. in-8° de X-210 pages; 20 frs.; J. Hermann, Paris, 1922.

Ces leçons sont toutes imprégnées du beau talent que leur auteur a déjà mis au service des théories einsteiniennes et cependant elles n'ont pas été écrites spécialement dans ce but. Elles présentent les développements d'une analyse due originairement à Henri Poincaré et développée surtout par MM. E. Goursat, Th. de Donder et par M. Cartan lui-même.

L'ouvrage se compose de dix-neuf chapitres tous très bien délimités et donnant une impression de brièveté qui en rend l'assimilation facile mais que, faute de place, nous ne pouvons analyser successivement. Contentons nous des idées générales d'ailleurs faciles à discerner.

La première, très grandiose, consiste à associer étroitement les invariants intégraux de la Dynamique et le Principe d'Hamilton. Rappelons que ce Principe peut être le fondement de la Gravifique la plus générale.

Avec les trois chapitres suivants, nous étudions les invariants intégraux et les formes différentielles (isolées ou formant un système dit *système de Pfaff*) qui restent invariantes de par un système d'équations différentielles dit *système caractéristique*. Les intégrales d'un système tel que ce dernier sont des fonctions qui restent constantes en vertu du système; on peut évidemment concevoir que non seulement des fonctions explicites mais aussi des expressions *différentielles* ou *intégrales* aient une propriété de constance tout à fait analogue; l'expression *intégrale* est un invariant intégral. Il y a là des résultats auxquels on doit être rapidement conduit rien qu'en cherchant à poursuivre l'étude des systèmes d'équations différentielles.

Mais où apparaît une note beaucoup plus curieuse c'est quand, avec le chapitre VI, on aborde les formes différentielles à multiplication extérieure dites, plus simplement, *formes extérieures*. Ce sont les formes différentielles qui apparaissent naturellement sous les intégrales multiples; elles ont des propriétés manifestement héritées des déterminants fonctionnels qui apparaissent, sous les mêmes intégrales, lors d'un changement de variables; ainsi la permutation de deux éléments différentiels successifs entraîne un changement de signe. Il y a là une des faces du calcul vectoriel considérée autrefois par Grassmann. Une forme extérieure admet généralement une forme *dérivée* et la forme primitive et sa dérivée figurent sous des intégrales égales mais d'ordres de multiplicités différant d'une unité, d'où les formules du type *stokien*. Une des variétés d'intégration est alors *déformable* avec invariance de l'intégrale y attachée. Au fond cette intégrale invariante équivaut à un invariant intégral parce qu'on peut toujours imaginer que la déformation susdite a lieu conformément à un système d'équations différentielles.

Il n'y a pas besoin d'aller plus loin pour apercevoir la magnifique et prodigieuse synthèse contenue dans ces théories. Au point de vue physique rappelons que les formules stokiennes peuvent conduire aux principales formules de la Gravifique et notamment aux équations de l'Electromagnétisme.

La notion de transformation infinitésimale d'un système d'équations différentielles retentit naturellement sur les invariants intégraux de ce système. Elle conduit aussi aux *équations aux variations* de Poincaré; les applications physiques ou mécaniques sont nombreuses. M. Cartan reprend, à ce propos, le problème des trois corps et en examine les intégrales de nature élémentaire, en les faisant dépendre de transformations infinitésimales simples admises par les équations du mouvement.

On aurait déjà pu dire qu'à une forme dérivée *nulle* correspondait une forme primitive *différentielle exacte*; cette remarque peut s'étendre aisément à des systèmes de formes et elle constitue alors le *Théorème de Frobenius*. Le théorème du *multiplicateur* nous ramène à l'analyse jacobienne; il remet au premier plan les équations *canoniques* (à multiplicateur égal à l'unité) et, avec celles-ci, il faut étudier les formes *bilinéaires* aux dérivées partielles qui en permutent les intégrales; c'est une idée analogue à celle de la forme linéaire qui peut permuter les intégrales d'un système différentiel ordinaire.

En ces points il semble que M. Cartan ait donné la mesure de vues personnelles des plus profondes. Après Poincaré il généralise les parenthèses de Poisson et s'efforce de tirer d'intégrales connues un parti beaucoup plus étendu que celui qui correspond à leur combinaison deux à deux.

Ici, il y aura probablement toujours une pierre d'achoppement. Des intégrales, combinées entre elles par les méthodes en litige, finissent toujours très rapidement par révéler un cycle d'intégrales qui ne font plus que se permuter, annihilant tout espoir d'apercevoir une intégrale nouvelle. Mais il ne faut pas perdre de vue que l'existence et la structure de ces cycles jettent un jour tout spécial sur les équations différentielles de la Mécanique qu'on peut précisément se proposer d'étudier au point de vue de ces propriétés cycliques.

Soyons bref sur les questions, si importantes cependant, qui constituent le dernier tiers du volume. M. Cartan retrouve les méthodes d'intégration pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Il étudie les équations différentielles admettant des transformations infinitésimales données. Il revient, dans un chapitre spécial, à la réduction des équations du problème des trois corps. Il examine les positions, souvent réciproques, de la théorie des invariants intégraux et du Calcul des Variations. Il termine par l'équation invariante de l'optique, par les trajectoires lumineuses considérées jusque dans le champ d'Einstein-Schwarzschild.

Que de choses entre ce dernier résultat et une théorie dont la première esquisse grandiose appartient à Henri Poincaré.

A. BUHL (Toulouse).

H. GALBRUN. — **Introduction à la Théorie de la Relativité ;** Calcul différentiel absolu et Géométrie. — 1 vol. in-8, 459 pages; 60 fr. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1923.

Dans les 11 chapitres de ce livre, M. Galbrun expose les principes du calcul différentiel absolu, la théorie du déplacement parallèle, la Géométrie de M. Weyl et les applications de ces théories aux géométries euclidienne et non-euclidiennes à n dimensions, à l'étude des espaces de Galilée en mécanique rationnelle et en électromagnétisme, à la relativité restreinte, et à l'électrodynamique de Minkowski.

Le point de vue de l'Auteur est à la fois didactique et critique, et l'on ne saurait trop étudier les remarques judicieuses et fines que lui inspire cette seconde attitude quant aux interprétations que nombre de commentateurs d'Einstein ont données de la relativité restreinte. On pourrait parfois regretter que l'exposé didactique soit un peu touffu, et nous n'avons pas les mêmes préventions que l'Auteur contre la suppression du signe Σ. Il est à souhaiter que cet ouvrage soit suivi d'un autre livre consacré à la relativité généralisée et rédigé avec le même soin critique.

G. JUVET (Neuchâtel).

F. KLEIN. — **Gesammelte mathematische Abhandlungen** herausgegeben von R. FRICKE and A. OSTROWSKI (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen). Erster Band: Liniengeometrie, Grundlegung der Geometrie, Zum Erlanger Programm. — 1 vol. in-8°, 612 p. avec un portrait; Verlag Julius Springer, Berlin.

La publication des œuvres de M. Felix Klein, dont ce volume constitue la première partie, présente un intérêt tout à fait spécial. C'est l'autobiographie du maître. Le vénérable mathématicien retrace, dans une série d'articles intercalés entre les mémoires du recueil, le développement de ses idées, les milieux et les personnes dont l'influence s'est fait sentir sur ses idées, et parfois les recherches récentes d'autres mathématiciens qui jettent de la lumière sur ce qui était alors prématuré ou peu précis. Avec une vue d'ensemble il nous fait entrevoir l'influence qu'il a eu lui-même, et le rôle joué actuellement dans la science par les idées qu'il représente.