

# Communications.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

à la notion d'*homologie* que Poincaré a introduite et dont la place est prédominante dans ses travaux<sup>1</sup>.

La première formule d'Euler acquiert de son côté une interprétation facile<sup>2</sup>, tandis que, d'un autre, on se trouve en possession d'un procédé commode donnant les contours d'encadrement<sup>3</sup>.

Les questions d'homéomorphie, enfin, se greffent sans grande difficulté sur ceci<sup>4</sup>.

On sait, ce qu'en esprit de finesse, les plus illustres, les Riemann, les Jordan, les Möbius et, combien d'autres, ont dépensé d'ingéniosité dans l'exploration de ce domaine si riche et si attrayant de l'Analysis Situs, dernière citadelle, selon quelques-uns, de l'esprit de finesse.

Leurs efforts n'ont point été vains ; mais, dans ce champ aussi, grâce au génie si varié et si illimité de Poincaré, l'on verra peu à peu les tendances des Weierstrass et des Kronecker prédominer. Tant il est vrai, comme souvent on l'a dit, que, si les nombres ne gouvernent point le monde, ce sont eux néanmoins qui nous enseignent comment le monde est gouverné.

COMMUNICATIONS.

1. — M. G. VALIRON (Strasbourg). — *Sur les fonctions entières*. — Soit  $f(z)$  une fonction entière d'ordre fini non entier  $\rho$  ; l'exposant de convergence de la suite des zéros est égal à  $\rho$ . Soit  $r_n$  le module du  $n^{\text{ième}}$  zéro, je dirai que la fonction est de *première classe* si la série

$$\sum \frac{1}{r_n^\rho} \tag{1}$$

converge, dans le cas contraire qu'elle est de *deuxième classe*. En m'appuyant sur une généralisation simple de l'inégalité de M. Jensen, j'ai établi que, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction soit de première classe est que l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\rho} \frac{\log M(x)}{x^{\rho+1}} dx \tag{2}$$

dans laquelle  $M(x)$  désigne le maximum de  $|f(z)|$  pour  $|z| = x$ , converge. Si l'on désigne par  $R_n$  le rapport rectifié du coefficient de rang  $n$  au

<sup>1</sup> Gustave DUMAS et Jules CHUARD, Sur les homologies de Poincaré. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 171, p. 1113, 1920.

Voir aussi la thèse « *Questions d'Analysis Situs* » présentée à l'Université de Lausanne par M. J. CHUARD.

*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. 46.

<sup>2</sup> Voir à ce propos : O. VEBLEN, An application of modular equations in Analysis Situs. *Annals of Mathematics*, 2<sup>e</sup> Série, t. 14, p. 86, 1912-13.

<sup>3</sup> Gustave DUMAS, Sur les contours d'encadrement. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 172, p. 1221, 1921.

<sup>4</sup> Gustave DUMAS, Sur un tableau normal relatif aux surfaces unilatérales. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 174, p. 93, 1922.

coefficient de rang  $n - 1$  dans le développement de Taylor de  $f(z)$ , on déduit de la proposition précédente que la série (1) converge ou diverge en même temps que la série

$$\sum \frac{1}{R_n^\rho} \quad (3)$$

Dans le cas de l'ordre  $\rho$  entier, la convergence de (3) entraîne que le genre est  $\rho - 1$ . Il résulte de là que la classe se conserve par la dérivation, que les fonctions  $f(z) - x$  sont toutes de même classe; de même ces opérations conservent le genre dans le cas de l'ordre entier lorsque (3) converge.

Comme application on voit que si l'on pose

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

et si l'on suppose que la série

$$\sum \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|^k$$

converge, ou bien l'ordre de  $f(z)$  est moindre que  $k$ , ou bien l'ordre est  $k$  et la fonction de la première classe et si  $k$  est entier le genre est  $k - 1$  au plus (Voir la communication de M. POLYA à la dernière réunion de la Société, Neuchâtel, août 1920. *L'Ens. Math.*, t. XXI, p. 217).

2. — M. R. FUETER (Zurich). — *Le critère de Kummer relatif au dernier théorème de Fermat.* — Afin de pouvoir appliquer les méthodes de la théorie moderne des nombres à l'étude de l'équation de Fermat

$$a^l + b^l + c^l = 0 \quad (l \text{ nombre premier impair}), \quad (1)$$

il faut d'abord remplacer la *forme additive* de l'énoncé de Fermat par une *forme multiplicative*. Des transformations simples permettent de ramener l'expression (1) à

$$(a + bh)^{r_0} (a + bh^{r_1})^{r_1-1} \dots (a + bh^{r_{l-2}})^{r_{l-2}+1} = h^\rho \psi^l \quad (2)$$

où  $h = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ ,  $r$  étant une racine primitive (mod.  $l$ ) et  $r_i$  le plus petit reste positif de  $r^i$ .  $\psi$  est un nombre du corps  $k(h)$  et  $\rho$  un nombre déterminé par  $\rho \equiv -\frac{b}{a+b} \pmod{l}$ .

La formule (2) est valable pour  $c$  premier avec  $l$ . Elle fournit immédiatement les critères de Wieferich et de Furtwaengler. On peut aussi en déduire facilement les conditions de Kummer et de Mirimanoff.

3. — M. Alex. VÉRONNET (Strasbourg). — *Variation de la masse et de la distance d'une planète dans un milieu résistant.* — On suppose que l'atmosphère de la planète absorbe toutes les particules rencontrées. Alors sa distance au centre d'attraction varie en raison inverse du carré de sa masse:  $m^2 r = \text{const.}$  L'équation du mouvement et l'équation de la trajectoire se déterminent facilement quand on se donne la loi de variation de la densité du milieu. De deux planètes, celle dont la valeur de  $m^2 r$  est la plus faible se rapproche le plus vite du soleil. Le calcul montre que, quelque soit la loi de densité, les planètes n'ont pas pu se former à des distances très différentes des distances actuelles sans se rencontrer.

4. — M. A. SPEISER (Zurich). — *Sur la décomposition des nombres premiers dans les corps algébriques.* — Etant donnée une équation à coefficients entiers

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

on peut former avec les nombres  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  une série récurrente en commençant par  $n$  nombres entiers quelconques, par exemple par  $0, \dots, 0, 1$ . En réduisant les termes de cette série par un nombre premier  $p$  qui ne divise pas  $a_n$ , on reçoit une série périodique. Soit  $u$  le nombre de termes dans la période et soit  $f$  le plus petit nombre satisfaisant à l'équation  $p^f \equiv 1 \pmod{u}$ , on démontre que  $f$  est le degré des idéaux premiers divisant  $p$  dans le corps algébrique formé par les racines de l'équation proposée.

5. — M. Maurice FRÉCHET (Strasbourg). — *Sur divers modes de convergence.* — Les ensembles de fonctions où la limite d'une suite est définie au moyen d'une définition particulière de la convergence donnent lieu à une extension plus ou moins complète des propriétés des ensembles linéaires suivant que la définition adoptée pour la convergence peut ou non s'énoncer au moyen d'un écart de deux fonctions.

La convergence uniforme, la convergence en moyenne de Fischer, la convergence en mesure de F. Riesz convenablement généralisée, la convergence relativement uniforme de E. H. Moore peuvent être définies par l'intermédiaire de définitions, convenant à chaque cas, de la distance de deux fonctions.

Dans un mémoire sous presse <sup>1</sup>, l'auteur a montré qu'au contraire la convergence ordinaire, la convergence quasi-uniforme d'Arzelà, la convergence presque partout de Lebesgue ne peuvent être définies par l'intermédiaire d'une définition de l'écart, quelle qu'elle soit.

<sup>1</sup> *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 1921.

6. — M. L. CRELIER (Berne). — *Sur la puissance de la droite*<sup>1</sup>. — La puissance d'une droite par rapport à un cercle que nous avons définie par l'expression

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \frac{r + d}{r - d}$$

peut être établie également sans difficultés par la géométrie synthétique, en considérant la puissance d'une involution circulaire de points et en passant à celle de l'involution circulaire des tangentes correspondantes. La puissance de l'involution est alors égale à la puissance de l'axe de l'involution par rapport au cercle considéré.

En outre tous les théorèmes et toutes les constructions déduits de la puissance d'un point par rapport à un cercle correspondent à des théorèmes et des constructions analogues déduits de la puissance d'une droite.

Enfin la notion de puissance se laisse parfaitement étendre à la sphère. Nous aurons la puissance d'un point et la puissance d'un plan par rapport à une sphère avec des propriétés analogues aux précédentes.

Les propriétés involutives déduites de la théorie de la puissance du point ou de la droite se retrouvent également dans la puissance du point ou du plan par rapport à une sphère.

7. — M. L. KOLLROS (Zurich). — *Invariants orthogonaux de l'espace à n dimensions*. — La généralisation, dans l'espace à  $n$  dimensions, des notions de distance, d'angle et de courbure conduit aux résultats suivants:

1. En géométrie euclidienne, deux espaces linéaires  $\varepsilon_k$  et  $\varepsilon_l$  n'ayant aucun point commun (dans le fini et à l'infini) ont *une seule perpendiculaire commune*; il y en a plusieurs en géométrie non euclidienne.

2. Si  $\varepsilon_k$  et  $\varepsilon_l$  ( $k + l \leq n$ ) ont un seul point commun, le nombre de leurs angles  $\varphi$  est le plus petit des 4 nombres  $k, l, n - k, n - l$ . Ce résultat, démontré par JORDAN (*Bull. soc. math.*, t. III) avait été trouvé (22 ans auparavant) par SCHLÄFLI dans un mémoire: *Theorie der vielfachen Kontinuität* qui n'a été publié qu'en 1901. Schläfli appelle facteur de projection d'un espace sur l'autre le produit des cosinus de ces angles et le travail de Jordan permet de trouver l'équation qui détermine ces cosinus. La forme de cette équation ne montre pas immédiatement que *ces angles  $\varphi$  sont réels*, quand les espaces  $\varepsilon_k$  et  $\varepsilon_l$  le sont. Or, en prenant un des espaces donnés comme espace de coordonnées, on trouve pour  $\operatorname{tg}^2 \varphi$  une équation séculaire; toutes les racines sont donc réelles et, de plus, positives, car  $\operatorname{tg}^2 \varphi$  s'exprime, d'ailleurs, par

<sup>1</sup> *Enseignement mathématique*, N° 1-2, XIX<sup>e</sup> année, janvier-mars 1917.

*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. XVII, août et septembre 1917.

le quotient de 2 formes quadratiques définies et positives. Les côtés  $(m_1, n_1) \dots (m_l, n_l)$  de ces angles sont tels que chaque  $m_i$  ou  $n_i$  est perpendiculaire à tous les  $m_h$  et  $n_h$  (où  $h \neq i$ ). Si l'on considère les éléments à l'infini de nos espaces, on déduit du résultat précédent un théorème de géométrie non euclidienne, car l' $\varepsilon_{n-1}$  à l'infini d'un  $\varepsilon_n$  euclidien est un espace de Riemann. Pour  $n = 4$ , on retrouve cette proposition connue<sup>1</sup>: 2 droites gauches d'un espace de Riemann à 3 dimensions ont 2 perpendiculaires communes, *toujours réelles*, l'une  $AA_1$  correspond à un minimum de la distance, l'autre  $BB_1$  à un maximum; 2 plans passant respectivement par les 2 droites ont un angle maximum lorsqu'ils contiennent  $AA_1$ , minimum quand ils passent par  $BB_1$ .

3. Pour généraliser la notion de courbure totale, nous utilisons un théorème de Jordan (C. R.; 79) (Euler pour  $n = 3$ ). Considérons dans l' $\varepsilon_n = \varepsilon_{m+k}$  une «  $k$ -surface » définie par un système de  $k$  équations simultanées:  $x_{m+i} = f_i(x_1, \dots, x_m)$  pour  $i = 1 \dots k$ ; elle présente en chaque point  $m$  directions rectangulaires telles que la somme des carrés des angles formés par deux «  $k$ -plans » tangents consécutifs divisée par  $ds^2$  soit maximum ou minimum. En désignant ce quotient par  $\frac{1}{R_1^2}, \dots, \frac{1}{R_m^2}$  pour chacune de ces  $m$  directions, nous appellerons

*courbure totale* de la «  $k$ -surface » en un de ses points P le produit:

$$c = \frac{1}{R_1 \dots R_m}. \text{ Si l'on représente les dérivées secondes par } r_{la}^i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_a}$$

et la double somme  $\sum_{i,l} r_{la}^i r_{lb}^i$  par le symbole  $(a, b)$ , on trouve, en prenant P pour origine et son «  $k$ -plan » tangent pour espace de coordonnées

$$c^2 = \begin{vmatrix} (1, 1) & \dots & (1, m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (m, 1) & \dots & (m, m) \end{vmatrix}.$$

Pour  $i = 1$ , on a la surface:  $x_n = f(x_1 \dots x_{n-1})$ ; le déterminant ci-dessus est alors un carré parfait et l'expression de la courbure totale est:

$$c = \begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & \dots & r_{mm} \end{vmatrix} \text{ en posant } \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_a} = r_{la} \quad (l \text{ et } a = 1 \dots m)$$

( $rt - s^2$  pour  $n = 3$ ).

<sup>1</sup> DARBOUX. *Principes de géom. anal.*, 1917, p. 310.

8. — Chargé par le Comité de la Société mathématique suisse d'introduire la question de l'*adhésion de la Suisse à l'Union internationale mathématique*, M. H. FEHR donne un aperçu des statuts de l'Union adoptés à Strasbourg le 20 septembre 1920. Cette union se rattache au Conseil international de recherches créé sous les auspices de la Conférence internationale des académies. L'admission d'un pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par le Conseil international de recherches. La Société helvétique des sciences naturelles ayant adhéré au Conseil international, en août 1920, la Société mathématique suisse ne saurait se tenir à l'écart de l'Union internationale mathématique. La question sera soumise à l'assemblée annuelle (Schaffhouse, août 1921) après entente avec le Comité central de la Société helvétique.

### Société mathématique suisse.

*Schaffhouse, 27 août 1921.*

La Société mathématique suisse a tenu sa onzième réunion annuelle à Schaffhouse, le 27 août 1921, sous la présidence de M. le Prof. L. CRELIER (Berne), à l'occasion de la cent-deuxième réunion annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative* la Société a décidé, à l'unanimité, d'accord avec le Comité central de la Société helvétique, d'adhérer à l'*Union internationale mathématique*. Puis, après avoir donné décharge au trésorier sortant de charge, elle a constitué comme suit le comité pour les années 1922 et 1923: M. Gustave DUMAS (Lausanne), président; M. O. SPIESS (Bâle), vice-président; M. A. SPEISER (Zurich), secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Berne*.

### COMMUNICATIONS SCIENTIFIQUES.

1. — M. S. BAYS (Fribourg). — *Sur la généralisation du problème des triples de Steiner*. — Appelons *n-uple* une combinaison  $n$  à  $n$ , et *problème des n-uples*, le problème suivant, généralisant le *problème des triples de Steiner*:

*Pour quel nombre  $N$  d'éléments, peut-on trouver un SYSTÈME DE N-UPLES, contenant UNE FOIS ET UNE SEULE FOIS chaque  $(n - 1)$ -uple de ces éléments <sup>1</sup>?*

<sup>1</sup> Exemple: Le triple 123 contient les trois couples 12, 13, 23, et le système de triples (de Steiner) 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356, contient une fois et une seule fois chaque couple des sept éléments 1, 2, ..., 7. Voir NETTO, *Combinatorik*, chap. 10, p. 202.