III. — Construction des familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens complet.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

l'addition de deux ensembles et comprenant la famille qu'on vient de former.

Il pourra aussi être utile de remarquer que si une famille d'ensembles, $\mathcal{H}$, est telle que la différence de deux de ses ensembles est la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{H}$, la famille $\mathcal{H}_r$ est constituée par tous les ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'ensembles disjoint appartenant à $\mathcal{H}$. (On est conduit à envisager le cas actuellement considéré si l'on remarque que le système moléculaire attaché à une famille quelconque jouit lui-même de cette propriété.)

En vue de mesurer le degré de complexité de chacun des ensembles de $\mathcal{H}_r$, on commencera par appeler $U\mathcal{H}$ l'opération qui consiste à adjoindre à une famille $\mathcal{H}$ les ensembles qui sont différences de deux ensembles de $\mathcal{H}$, puis à adjoindre à la famille ainsi formée les ensembles qui sont sommes de deux des ensembles de cette seconde famille.

Ceci fait, on formera les familles

$$\mathcal{H}, \quad U\mathcal{H}, \quad U(U\mathcal{H}), \ldots$$

et en général la famille qu'on peut désigner par $U^{(n)}\mathcal{H}$ et qui résulte de l'opération U réitérée n fois à partir de $\mathcal{H}$. Alors: ou bien à partir d'un certain rang p les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à $U^{(p)}\mathcal{H}$ et $U^{(p)}\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_r$; ou dans le cas contraire $\mathcal{H}_r$ est formé des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $U^{(n)}\mathcal{H}$; autrement dit

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} + U\mathcal{H} + \ldots + U^{(n)}\mathcal{H} + \ldots .$$

On voit alors qu'on pourra distinguer dans $\mathcal{H}_r$ des ensembles de classe 0, 1, 2, ..., n, ... , la classe étant toujours déterminée par un rang entier. Bien entendu, il pourra arriver que le nombre des classes soit fini si les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à partir d'un certain rang.

III. — Construction des familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens complet.

1. *Définitions.* — Appelons *ensemble limite restreint* d'une suite infinie d'ensembles E_1, E_2, ... E_n ... l'ensemble R des

éléments qui appartiennent chacun à partir d'un certain rang (variable) aux termes de cette suite.

Appelons *ensemble limite complet* de cette suite, l'ensemble C des éléments qui appartiennent chacun à une infinité (variable) de termes de cette suite.

Il est évident que R appartient à C. Lorsque R est identique à C nous dirons que la *suite des* E_n *converge* et que $R \equiv C$ est son *ensemble limite* [1].

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *fermée* si tout ensemble limite d'une suite convergente infinie d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$ appartient aussi à $\mathcal{F}$.

Tout comme pour les « fonctionnelles » de M. Hadamard, on pourrait dire qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *linéaire* si elle est fermée et additive au sens restreint. La définition des familles linéaires d'ensembles est équivalente à celle des familles $\mathcal{F}$ *additives au sens complet* (c'est-à-dire telles que si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ est une suite finie ou infinie d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$, les ensembles $E_1 - E_2$ et $E_1 + E_2 + \ldots$ appartiennent à $\mathcal{F}$).

Remarque: Si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$; $E'_1, E'_2, \ldots, E'_n, \ldots$ sont deux suites infinies quelconques d'ensembles quelconques et si e, E, e', E$'$ sont respectivement leurs ensembles limites restreint et complet; si d'autre part R, C; R_1, C_1 sont respectivement les ensembles limites restreint et complet des suites

$$S_1 = E_1 + E'_1, \ldots, S_n = E_n + E'_n \ldots$$

$$D_1 = E_1 - E'_1, \ldots, D_n = E_n - E'_n \ldots$$

on a les relations symboliques

$$\left.\begin{array}{l} e + e' < R < C < E + E' \\ e - E' < R_1 < C_1 < E - e' \end{array}\right\} \qquad (1)$$

où le signe $<$ est mis pour « appartient à ».

---

[1] On remarque que :

1° Si à partir d'un certain rang les ensembles d'une suite $E_1, E_2, \ldots$ sont identiques à un même ensemble E, cette suite converge et a E pour ensemble-limite.

2° Si on extrait d'une suite convergente quelconque d'ensembles $F_1, F_2, \ldots$, une suite infinie de termes de rangs distincts $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots$ cette suite est convergente et vers la même limite.)

(La définition actuelle des ensembles-limites range donc les familles d'ensembles dans la catégorie des classes $(\mathcal{L})$ de ma Thèse.)

En particulier si les deux suites données des E_n et des E'_n convergent et si E, E′ sont leurs ensembles-limites, les deux suites des $S_n = E_n + E'_n$ et des $D_n = E_n - E'_n$ convergent et leurs ensembles limites sont $E + E'$, $E - E'$ [1].

2. *Construction de familles additives au sens complet.* — Le problème consiste étant donnée une famille arbitraire $\mathcal{H}$ d'ensembles quelconques, à déterminer une famille $\mathcal{F}$ comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D addition et soustraction de deux ensembles et *L* passage à la limite c'est-à-dire formation de l'ensemble limite d'une suite convergente d'ensembles de $\mathcal{F}$.

I. D'après la méthode générale indiquée § I, page 114, on pourra former la plus petite $\mathcal{H}_c$ de ces familles en la constituant par les ensembles qui sont chacun dernier terme d'une suite bien ordonnée dénombrable σ d'ensembles G résultant chacun d'une des opérations S, D, L effectuée sur des ensembles appartenant à $\mathcal{H}$ ou précédant G dans σ.

(On peut si l'on veut remplacer les opérations S et L par l'opération consistant à additionner une suite dénombrable d'ensembles).

II. Tout ensemble E de $\mathcal{H}_c$ résulte donc d'une suite dénombrable d'opérations portant chacune sur une suite dénombrable d'ensembles. Par conséquent la construction de chaque ensemble E à partir de $\mathcal{H}$ ne fait intervenir qu'une suite dénombrable $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles de $\mathcal{H}$: E appartient en même temps à la plus petite famille additive au sens complet comprenant $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ Et réciproquement celle-ci appartient à $\mathcal{H}_c$. Donc $\mathcal{H}_c$ est constituée par les ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $\mathcal{N}_c$ qui sont chacune la plus petite

[1] Un de mes collègues de Strasbourg, M. Flamant, a bien voulu me faire observer que, sans supposer les E_n et F_n simultanément convergentes, on pourrait préciser les inégalités symboliques (1). C'est ainsi qu'on a

$$R_1 \equiv e - E' \;; \quad e - e' < C_1 < E - e' \;, \quad E - E' < C_1 < E - e' \;, \quad C = E + E' \;.$$

J'ajoute que de même :

$$C = E + E' \;, \quad e + e' < R < E + e' \;, \quad e + e' < R < E' + e \;;$$

de sorte que si l'une des suites données converge, on n'a plus que des égalités. Par exemple si les E_n convergent : $C_1 = E - e'$, $R = E + e'$.

famille additive au sens complet comprenant une suite dénombrable arbitraire déterminée $\mathfrak{N}$ d'ensembles E_1, E_2, ... de $\mathfrak{K}$.

III. Soit $\mathfrak{N}_r$ la plus petite famille additive au sens *restreint* comprenant $\mathfrak{N}$; c'est, comme $\mathfrak{N}$, une famille dénombrable d'ensembles F_1, F_2, ... F_n, ... Appelons *atome* relatif à l'élément A, pour le système $\mathfrak{N}$, l'ensemble commun à ceux des ensembles de $\mathfrak{N}_r$ qui comprennent A. On voit que si un atome relatif à A possède au moins un élément B autre que A, il est aussi relatif à B. Deux atomes sont nécessairement disjoints s'ils sont distincts. Un atome pour le système $\mathfrak{N}$ est, si on le compare à un ensemble quelconque F_i de $\mathfrak{N}_r$, soit un sous-ensemble de F_i, soit disjoint de F_i. Le mode de construction de $\mathfrak{N}_c$ indiqué plus haut montre qu'il en est alors de même vis-à-vis des ensembles de $\mathfrak{N}_c$. Finalement si on a une famille *dénombrable*, $\mathfrak{N}$ d'ensembles, on peut regarder ces ensembles de $\mathfrak{N}$ chacun comme une somme d'atomes disjoints, atomes qui sont indestructibles quand on applique aux ensembles de $\mathfrak{N}$ une suite dénombrable quelconque d'additions, soustractions, passages à la limite, de sorte que, de même, chacun des ensembles de la plus petite famille $\mathfrak{N}_c$ additive au sens complet et comprenant $\mathfrak{N}$ est aussi une somme d'atomes disjoints. (Ces remarques perdent leur intérêt dans le cas où les atomes seraient des ensembles réduits chacun à un élément, mais ce cas ne se présente pas nécessairement.) La notion d'atome est d'ailleurs moins facilement utilisable ici que dans le cas précédemment étudié où $\mathfrak{N}$ serait fini (cas où les atomes étaient en nombre fini), parce que l'ensemble des atomes disjoints, non seulement ne sera plus ici fini, mais même ne sera pas, en général, dénombrable.

3. *Classes d'ensembles.* — On peut, si l'on veut, mettre en évidence le degré de complexité de la construction des divers ensembles de $\mathfrak{K}_c$ en employant la méthode générale indiquée § 1, page 116. On appellera U la transformation qui consiste à remplacer d'abord une famille d'ensembles $\mathfrak{K}$ par la famille $\mathfrak{K}'$ obtenue en adjoignant à $\mathfrak{K}$ les ensembles limites de suites convergentes (s'il en existe) d'ensembles de $\mathfrak{K}$: puis à adjoindre à la famille $\mathfrak{K}'$ obtenue les ensembles qui sont différences d'ensembles de $\mathfrak{K}'$ et enfin à adjoindre à la famille obtenue $\mathfrak{K}_1$, les ensembles qui sont sommes de deux ensembles de $\mathfrak{K}_1$. L'application directe

de la méthode générale consisterait à considérer $\mathcal{H}_c$ comme formé des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles qui sont les termes de la série bien ordonnée Σ':

$$\mathcal{H}, \quad \mathrm{U}\mathcal{H}, \quad \mathrm{U}(\mathrm{U}\mathcal{H}), \ldots$$

Mais il est préférable ici de remarquer que $\mathcal{H}_c$ est aussi la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille $\mathcal{H}_r$ (famille additive au sens restreint, la plus petite comprenant $\mathcal{H}$). En conséquence $\mathcal{H}_c$ est aussi formée des ensembles appartenant à un des termes de la suite bien ordonnée Σ

$$\mathcal{H}_r, \quad \mathrm{U}\mathcal{H}_r, \quad \mathrm{U}(\mathrm{U}\mathcal{H}_r), \ldots$$

où chaque terme s'obtient en appliquant l'opération U à la somme des familles de Σ qui précède celui-ci. Or on peut simplifier cette construction au moyen du lemme énoncé plus haut, sur la somme et la différence de deux ensembles limites. Il en résulte en effet que si $\mathcal{K}$ est une famille additive au sens restreint la transformation $\mathrm{U}\mathcal{K}$ se réduira à $\mathrm{U}\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ et donnera une famille $\mathrm{U}\mathcal{K}$ additive au sens restreint.

On en conclut que la suite Σ s'obtient de la façon suivante: chaque terme est la famille $\mathcal{K}$ constituée par la somme $\mathcal{K}$ des familles de Σ précédant ce terme et par les ensembles-limites des suites convergentes — s'il en existe — d'ensembles de $\mathcal{K}$. Autrement dit, après la formation de $\mathcal{H}_r$ (pour laquelle n'interviennent que les opérations S, D) la formation des termes successifs de Σ ne fait plus intervenir que l'opération L de passage à la limite et chaque terme de Σ est une famille additive au sens restreint. On voit en particulier qu'au lieu d'appliquer dans un ordre quelconque l'addition, la soustraction, le passage à la limite, on peut pour former $\mathcal{H}_c$, épuiser sur $\mathcal{H}$ les effets de la soustraction; puis sur la famille $\mathcal{H}_s$ obtenue épuiser les effets de l'addition; enfin sur la famille $\mathcal{H}_r$ ainsi engendrée épuiser les effets du passage à la limite.

La considération de la suite Σ non seulement offre un mode régulier de construction de $\mathcal{H}_c$ par l'extension progressive de la famille $\mathcal{H}$, mais encore il a sur le premier mode de construction indiqué l'avantage de fournir une répartition naturelle des ensembles de la famille $\mathcal{H}_c$ en « classes » d'ensembles dont la construction à partir de $\mathcal{H}$ est de plus en plus compliquée.

Applications. — On conçoit bien que les généralités précédentes ont trouvé leur origine dans les travaux concernant les familles additives d'ensembles linéaires dont on trouvera l'exposé récent le plus complet dans l'ouvrage de M. de la VALLÉE-POUSSIN : « Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles ».

Même dans ce cas l'auteur croit avoir élargi le point de vue ordinaire, par exemple en ne se restreignant pas au cas où la famille initiale donnée $\mathcal{H}$ est formée d'intervalles.

Mais sa théorie fournit aussi des applications intéressantes dans le cas où les éléments considérés sont des points de l'espace à une infinité de dimensions. L'auteur développera ailleurs ces applications ainsi que l'application à ce cas de la théorie des fonctions additives d'ensembles abstraits.

IV. — Fonctions additives d'ensembles abstraits.

Définitions. — Si une correspondance est établie qui fait correspondre à tout ensemble E d'une certaine famille $\mathcal{F}$, un nombre déterminé $f(E)$, cette correspondance définit une *fonction d'ensemble*, uniforme sur la famille $\mathcal{F}$.

Soient E_1, E_2 deux ensembles disjoints, c'est-à-dire sans éléments communs ; si l'on a

$$f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$$

toutes les fois que E_1, E_2, $E_1 + E_2$ appartiennent à $\mathcal{F}$, on dit que f est *additive au sens restreint* sur $\mathcal{F}$.

Soient E_1, E_2, ... E_n, ... une suite infinie dénombrable d'ensembles disjoints deux à deux ; si l'on a

$$f(E_1 + E_2 + \dots) = f(E_1) + f(E_2) + \dots$$

toutes les fois que les ensembles E_1, E_2, ... et $E_1 + E_2 + \dots$ appartiennent à la famille $\mathcal{F}$, on dit que f est *additive au sens complet* (ou plus simplement additive) sur $\mathcal{F}$.

On conçoit qu'il sera généralement plus facile et plus simple d'étudier une fonction additive au sens restreint (complet) sur une famille d'ensembles additive au sens restreint (complet).