SUR LES FOYERS RATIONNELS DES COURBES PLANES

Autor(en): **Turrière, Emile**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515733

SUR LES FOYERS RATIONNELS DES COURBES PLANES

PAR

M. Emile TURRIÈRE (Montpellier).

A l'occasion de l'article *Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique* de M. P. APPELL, que publie ci-dessus l'*Enseignement Mathématique*, je crois devoir ajouter quelques indications à l'article *Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique* que j'avais publié ici-même en 1919 [1].

L'équation polaire d'une courbe algébrique douée d'un foyer rationnel O, lorsque ce point est pris pour pôle, peut être mise sous la forme:

$$r = f\left(\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right) ,$$

f étant une fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$.

1. Cette remarque rappelée, je considère une *courbe de direction* de LAGUERRE. La tangente de cette courbe étant représentée par l'équation

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \omega(\alpha) ,$$

les cosinus directeurs de cette tangente, c'est-à-dire $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, sont fonctions rationnelles de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. Par définition, d'autre part, x et y sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t, telles que $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ soient aussi des fonctions rationnelles de t. Il en résulte que, pour une représentation propre ou rendue propre, t est une fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

La fonction $\omega(\alpha)$ est donc fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

Par suite:

La podaire, par rapport à un point quelconque du plan, d'une courbe algébrique de direction est une courbe admettant ce point pour foyer rationnel.

Réciproquement, si on considère une courbe (T) admettant

---

[1] *L'Enseignement Mathématique*, 20e année, 1919, p. 433-436.

O pour foyer rationnel, sa podaire négative est définie par une équation polaire tangentielle:

$$\omega = f\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right);$$

$\frac{d\omega}{d\alpha}$ et $\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}$ sont alors des fonctions rationnelles de tang $\frac{\alpha}{2}$; les coordonnées du point courant de cette podaire négative et le rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\alpha} = \omega + \frac{d^2\omega}{d\alpha^2}$ sont fonctions rationnelles de ce paramètre. Par suite:

La podaire négative d'une courbe plane, algébrique, admettant le pôle pour foyer rationnel, est une courbe de direction.

2. En menant par un point O, fixe, un vecteur $O\rho$ équivalent au rayon de courbure R au point courant M d'une courbe (C), le lieu de l'extrémité ρ de ce vecteur est la courbe nommée *la radiale* de la courbe (C). Le point ρ a pour coordonnées polaires R et α, en prenant O pour pôle avec un axe azimutal convenable. Si la courbe (C) est de direction, R est, d'après ce qui vient d'être indiqué, une fonction rationnelle de tang $\frac{\alpha}{2}$. Par suite:

La radiale d'une courbe de direction plane et algébrique, est une courbe admettant le pôle pour foyer rationnel.

Réciproquement, si on impose la radiale (R) d'une courbe inconnue (C), en supposant que (R) soit une courbe algébrique admettant le pôle O pour foyer rationnel, l'équation naturelle de la courbe inconnue (C) est:

$$R = f\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right),$$

f étant rationnel en tang $\frac{\alpha}{2}$. Les coordonnées cartésiennes d'un point courant de (C) sont déterminées par deux quadratures,

$$\int R\cos\alpha\, d\alpha \qquad \text{et} \qquad \int R\sin\alpha\, d\alpha\,,$$

portant toutes deux sur des fonctions rationnelles de tang $\frac{\alpha}{2}$. Si l'intégration s'effectue au moyen de seules fonctions rationnelles, la courbe (C) est une courbe de direction de Laguerre. Mais, généralement, la courbe (C) ainsi obtenue est transcendante (panalgébrique comme la chaînette, ou d'ordre deux de transcendance comme la chaînette d'égale résistance de CORIOLIS) C'est une courbe *transcendante de direction*, au sens de la généralisation de la notion de courbe de direction qui avait été indiquée par M. P. APPELL [1] en 1896.

Comme les propositions de cette nature de la géométrie générale ne valent que par les applications qu'il est possible d'en faire, je signalerai en plus de la chaînette d'égale résistance de CORIOLIS dont la radiale est une droite, les courbes suivantes transcendantes et de direction:

la cycloïde dont la radiale est le cercle $R = a \cos \alpha$; la chaînette ordinaire dont la radiale est le campyle; la tractrice d'HUYGENS dont la radiale est la courbe Cappa; la courbe d'égale pression pour un point matériel pesant (courbe qui a été étudiée par M. L. LECORNU, mais qui avait été considérée dès 1700 par le marquis de L'HOSPITAL, par Jean BERNOULLI et par LEIBNIZ (?)), la courbe du pendule à tension constante (intimement liée à la courbe de pression constante), la chaînette élastique considérée par BERNOULLI, par BOBILLIER et FINCK et citée par A.-G. GREENHILL qui fait remarquer que cette courbe d'équations paramétriques

$$x = t + 2k \operatorname{sh} t \ ,$$

$$y = \operatorname{ch} t + k \operatorname{ch}^2 t \ ,$$

se construit par additions des coordonnées de la chaînette ordinaire et d'une parabole, les tangentes en des points correspondants étant parallèles; la radiale de cette courbe s'obtient en ajoutant les rayons vecteurs de la multiplicatrice, radiale de la parabole, et du campyle d'EUDOXE, radiale de la chaînette ordinaire.

Comme courbe moins simple, mais intervenant en dynamique (tautochronisme avec résistance de milieu), je citerai la courbe:

$$y + s = e^{2s} \ ,$$

$$x = \omega + \frac{\sin 2\omega}{2} \ , \qquad y = \sin^2 \omega - \operatorname{Log} \sin \omega \ , \qquad e^s = \sin \omega \ ,$$

dont la radiale est la strophoïde droite.

[1] P. APPELL. Exercice sur les courbes de direction, *Nouvelles Annales de mathématiques* [3], t. XV, 1896, p. 491-495.