Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FOYERS RATIONNELS DES COURBES PLANES
Autor: Turrière, Emile
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515733

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES FOYERS RATIONNELS DES COURBES PLANES

PAR

M. Emile TURRIÈRE (Montpellier).

A l'occasion de l'article *Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique* de M. P. APPELL, que publie ci-dessus l'*Enseignement Mathématique*, je crois devoir ajouter quelques indications à l'article *Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique* que j'avais publié ici-même en 1919 [1].

L'équation polaire d'une courbe algébrique douée d'un foyer rationnel O, lorsque ce point est pris pour pôle, peut être mise sous la forme:

$$r = f\left(\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right),$$

f étant une fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$.

1. Cette remarque rappelée, je considère une *courbe de direction* de LAGUERRE. La tangente de cette courbe étant représentée par l'équation

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \omega(\alpha),$$

les cosinus directeurs de cette tangente, c'est-à-dire $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, sont fonctions rationnelles de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. Par définition, d'autre part, x et y sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t, telles que $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ soient aussi des fonctions rationnelles de t. Il en résulte que, pour une représentation propre ou rendue propre, t est une fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

La fonction $\omega(\alpha)$ est donc fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

Par suite:

La podaire, par rapport à un point quelconque du plan, d'une courbe algébrique de direction est une courbe admettant ce point pour foyer rationnel.

Réciproquement, si on considère une courbe (T) admettant

---

[1] *L'Enseignement Mathématique*, 20e année, 1919, p. 433-436.

O pour foyer rationnel, sa podaire négative est définie par une équation polaire tangentielle:

$$\omega = f\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right);$$

$\frac{d\omega}{d\alpha}$ et $\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}$ sont alors des fonctions rationnelles de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$; les coordonnées du point courant de cette podaire négative et le rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\alpha} = \omega + \frac{d^2\omega}{d\alpha^2}$ sont fonctions rationnelles de ce paramètre. Par suite:

La podaire négative d'une courbe plane, algébrique, admettant le pôle pour foyer rationnel, est une courbe de direction.

2. En menant par un point O, fixe, un vecteur $O\rho$ équivalent au rayon de courbure R au point courant M d'une courbe (C), le lieu de l'extrémité ρ de ce vecteur est la courbe nommée *la radiale* de la courbe (C). Le point ρ a pour coordonnées polaires R et α, en prenant O pour pôle avec un axe azimutal convenable. Si la courbe (C) est de direction, R est, d'après ce qui vient d'être indiqué, une fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. Par suite:

La radiale d'une courbe de direction plane et algébrique, est une courbe admettant le pôle pour foyer rationnel.

Réciproquement, si on impose la radiale (R) d'une courbe inconnue (C), en supposant que (R) soit une courbe algébrique admettant le pôle O pour foyer rationnel, l'équation naturelle de la courbe inconnue (C) est:

$$R = f\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right),$$

f étant rationnel en $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. Les coordonnées cartésiennes d'un point courant de (C) sont déterminées par deux quadratures,

$$\int R\cos\alpha\, d\alpha \quad \text{et} \quad \int R\sin\alpha\, d\alpha,$$

portant toutes deux sur des fonctions rationnelles de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. Si l'intégration s'effectue au moyen de seules fonctions rationnelles, la courbe (C) est une courbe de direction de LAGUERRE. Mais, généralement, la courbe (C) ainsi obtenue est transcendante (panalgébrique comme la chaînette, ou d'ordre deux de

transcendance comme la chaînette d'égale résistance de CORIOLIS) C'est une courbe *transcendante de direction*, au sens de la généralisation de la notion de courbe de direction qui avait été indiquée par M. P. APPELL [1] en 1896.

Comme les propositions de cette nature de la géométrie générale ne valent que par les applications qu'il est possible d'en faire, je signalerai en plus de la chaînette d'égale résistance de CORIOLIS dont la radiale est une droite, les courbes suivantes transcendantes et de direction:

la cycloïde dont la radiale est le cercle $R = a \cos \alpha$; la chaînette ordinaire dont la radiale est le campyle; la tractrice d'HUYGENS dont la radiale est la courbe Cappa; la courbe d'égale pression pour un point matériel pesant (courbe qui a été étudiée par M. L. LECORNU, mais qui avait été considérée dès 1700 par le marquis de L'HOSPITAL, par Jean BERNOULLI et par LEIBNIZ (?)), la courbe du pendule à tension constante (intimement liée à la courbe de pression constante), la chaînette élastique considérée par BERNOULLI, par BOBILLIER et FINCK et citée par A.-G. GREENHILL qui fait remarquer que cette courbe d'équations paramétriques

$$x = t + 2k \operatorname{sh} t \ ,$$
$$y = \operatorname{ch} t + k \operatorname{ch}^2 t \ ,$$

se construit par additions des coordonnées de la chaînette ordinaire et d'une parabole, les tangentes en des points correspondants étant parallèles; la radiale de cette courbe s'obtient en ajoutant les rayons vecteurs de la multiplicatrice, radiale de la parabole, et du campyle d'EUDOXE, radiale de la chaînette ordinaire.

Comme courbe moins simple, mais intervenant en dynamique (tautochronisme avec résistance de milieu), je citerai la courbe:

$$y + s = e^{2s} \ ,$$
$$x = \omega + \frac{\sin 2\omega}{2} \ , \qquad y = \sin^2 \omega - \operatorname{Log} \sin \omega \ , \qquad e^s = \sin \omega \ ,$$

dont la radiale est la strophoïde droite.

---

[1] P. APPELL. Exercice sur les courbes de direction, *Nouvelles Annales de mathématiques* [3], t. XV, 1896, p. 491-495.