Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE DÉPLACEMENT D'UN POINT DANS L'ESPACE A n

DIMENSIONS GÉOMÉTRIE DU n-ÈDRE

Autor: Tiercy, Georges

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-515736

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  doit garder ses côtés proportionnels à trois nombres  $l^2$ ,  $m^2$ ,  $n^2$ , on devra avoir:

$$\frac{u_1^* \times u_1}{l^2} = \frac{u_2 \times u_2}{m^2} = \frac{u_3 \times u_3}{n^2}$$

(le signe  $\times$  caractérisant ici le produit scalaire des vecteurs). C'est, comme on le voit, imposer au vecteur u, de satisfaire à deux équations numériques. Ces équations étant du  $2^{\text{me}}$  degré en u, on trouve comme solutions quatre directions de vecteurs u. Et si les nombres  $l^2$ ,  $m^2$ ,  $n^2$  ont été pris proportionnels aux produits des longueurs des arêtes opposées du tétraèdre, ces directions sont perpendiculaires aux sections anti-parallèles des faces, et nous retrouvons là seulement l'équivalent du théorème plan de Bellavitis.

Décembre 1921.

# SUR LE DÉPLACEMENT D'UN POINT DANS L'ESPACE $A \ n \ {\rm DIMENSIONS}$ GÉOMÉTRIE DU $n\text{-}{\rm EDRE}$

PAR

Georges Tiercy (Genève).

1. — On sait qu'en mécanique analytique, on peut ramener l'étude du mouvement d'un système dans l'espace ordinaire à l'étude du mouvement d'un point dans un hyperespace. Il n'est donc pas dépourvu d'intérêt d'examiner de très près les propriétés des variétés à une dimension dans l'espace  $E_n$ . Dans la présente étude, on utilise la notion de *vecteur* de  $E_n$ .

On appellera vecteur V le système de n nombres réels:

$$v_1, v_2, ..., v_n$$
;

nous dirons que les vecteurs d'un ensemble sont indépendants les uns des autres s'il n'y a entre eux aucune relation linéaire.

Les n nombres d'un vecteur apparaissent comme les n projections, sur n axes de coordonnées, d'un segment de droite V. Il en résulte que l'espace  $E_n$  à n dimensions pourra être envisagé comme l'ensemble des vecteurs se déduisant linéairement de n vecteurs indépendants. En réalité, on se meut dans le domaine de l'algèbre.

Désignons par  $V_1, V_2, ..., V_n$  les n vecteurs indépendants; et par  $(v_{k,i})$  les n projections du vecteur  $V_k$ ; la condition d'indépendance s'écrit :

$$\|\mathbf{v}_{k,i}\| \neq 0$$
;

si alors on désigne par X un vecteur quelconque déduit des n premiers, on aura:

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i V_i ;$$

ou bien, pour les projections  $x_k$  de X:

$$x_k = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i v_{k,i} ,$$

où les  $\rho_i$  sont des nombres réels.

S'il arrive qu'un système de n nombres ne puisse être déduit linéairement de n systèmes  $V_i$ , on dira que ce vecteur est en dehors de l'espace  $E_n$ .

Les *n* vecteurs indépendants qui définissent un espace E<sub>n</sub> constituent ce que nous appellerons la base de cet espace. Mais, de cette base, on pourra déduire une infinité d'autres ensembles de *n* vecteurs indépendants les uns des autres; et pour chacun, de ces nouveaux ensembles, chaque vecteur se déduira linéairement du premier ensemble. Tous ces ensembles seront dits équibases.

Nous supposerons connues les propriétés fondamentales de ces systèmes de nombres, nous réservant de revenir sur quelques détails essentiels. En particulier, nous supposerons le lecteur averti de tout théorème relatif à la composition ou à la décomposition des vecteurs, aux cosinus directeurs d'un vecteur, à l'angle de deux vecteurs, etc., etc.

2. — Soit, dans  $E_n$ , un vecteur variable  $\overline{OP}_i$ , dont les composantes s'écrivent  $x_i$  (i=1,2,...,n). Supposons que les nombres  $x_i$  varient d'une façon continue; au bout d'un temps très court, le vecteur X est devenu (X+dX) dont les composantes sont ( $x_i+dx_i$ ); ce vecteur est le résultant du système  $x_i$  et du système  $dx_i$ ; nous dirons alors que l'extrémité du vecteur X a parcouru un chemin, dont les composantes sont les quantités  $dx_i$ ; la longueur de ce chemin infiniment petit est donnée par:

$$ds^2 = \sum dx_i^2.$$

Supposons que ce déplacement se continue pendant un certain temps; dans chaque instant dt, l'extrémité du vecteur décrit un petit chemin ds; au bout du temps t, nous dirons que le point X a parcouru un arc s d'une courbe C.

Le nombre s ainsi défini est fonction du temps t; comme d'autre part les composantes  $x_i$  sont aussi fonctions de t, on pourra les exprimer en fonction du nombre s.

Cela posé, considérons (n-1) autres positions  $\overline{OP_2}$ ,  $\overline{OP_3}$ , ...,  $\overline{OP_n}$  du vecteur, voisines de la position  $\overline{OP_1}$ ; les composantes du vecteur  $OP_{k+1}$  étant:

$$(y_k)_i = x_i + dx_i + d^2x_i + \dots + d^kx_i$$
.

Par le point  $P_i$ , imaginons un vecteur unité  $(1_{p_1})$ , dont l'orientation varie, suivant une loi connue, en fonction du temps t ou de l'arc s de la courbe  $\mathcal{C}$ . Les projections de ce vecteur  $(1_{p_1})_i$  sont fonctions continues de t; autrement dit, par  $P_i$  passe une droite  $(p_i)$  dont les cosinus directeurs sont les quantités  $(1_{p_1})_i$ . De chacun des points  $P_i$  part donc un vecteur unité déterminé; soient  $(1_{p_i})$  ces vecteurs.

Par  $P_1$ , menons une parallèle  $h_k$  à chacune des droites  $p_k$ ; on détermine ainsi ce que nous appellerons des éléments pseudo-osculateurs;  $p_1$  et  $h_2$  définissent un plan pseudo-osculateur  $\Pi_2$ ;  $p_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , ...,  $h_k$  définissent un k-plan pseudo-osculateur  $\Pi_k$ .

Soit alors, dans  $\Pi_k$ , un point M quelconque; et soient  $\xi_i$  les composantes du vecteur OM. En appelant  $A_m$  les projections du

vecteur P<sub>4</sub>M sur les k axes de  $\Pi_k$ , il vient:

$$\xi_i = x_i + \sum_{m=1}^{m=k} \Lambda_m \left( 1_{p_m} \right)_i ,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$\xi_i = x_i + \sum_{m=1}^{m=k} B_m (1_{p_1})_i^{(m)}$$
:

les coefficients  $B_m$  sont évidemment les mêmes dans les n relations  $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ .

3. — Construisons maintenant le « n-èdre n-rectangle » de la courbe  $\mathcal{C}$ , attaché au point  $P_1$  et relatif à la direction  $(p_1)$ . Pour cela, considérons:

dans 
$$\Pi_2$$
, une droite  $g_2 \perp \grave{a} p_1$ ;
dans  $\Pi_3$ , une droite  $g_3 \perp \grave{a} \Pi_2$ ;
dans  $\Pi_k$ , une droite  $g_k \perp \grave{a} \Pi_{k-1}$ ;

Nous savons que cela est possible. Ces n droites  $(g_1 = p_1, g_2, ..., g_n)$  forment un n-èdre n-rectangle; c'est le n-èdre relatif à la direction  $p_1$ . Les cosinus directeurs des arêtes de ce n-èdre, ou projections des vecteurs-unités portés sur ces arêtes, seront les systèmes de nombres  $(1_h)_i$ ; pour k = 1, on a:

$$(1_1)_i = (1_{p_1})_i$$
.

En outre, on posera:

$$||(1_k)_i|| = +1$$
;

le n-èdre n-rectangle relatif à  $(p_1)$  est alors dit applicable sur le n-èdre de référence de  $E_n$ . Et l'on connaît la propriété fondamentale du déterminant ci-dessus: chaque terme est égal à son mineur.

4. — Nous nous sommes placés dans le cas tout à fait général où le vecteur  $(1_{p_1})$  a une direction quelconque. On passera sans difficulté au cas le plus important, qui est un cas particulier:

celui où la droite  $(p_1)$  se confond avec la tangente  $(t_1)$  en  $(P_1)$ ; on appelle tangente la droite passant par  $P_1$  et portant le petit vecteur  $dx_i$ . Dans ce cas, les éléments pseudo-osculateurs en  $P_1$  deviennent les éléments osculateurs; et le n-èdre rectangle attaché à  $P_1$  et relatif au vecteur  $(1_{p_1})$  devient le n-èdre principal.

5. — Prenons alors le cas du n-èdre principal; et supposons que le n-èdre de référence soit la position initiale du n-èdre mobile attaché au point P, de  $\mathcal{C}$ .

Considérons un n-èdre auxiliaire, mobile autour de l'origine fixe, et dont les arêtes soient données par les vecteurs  $(1_k)$ .

Soit X un vecteur  $\overline{OM}$  rapporté au n-èdre fixe; et soit  $\Xi$  le même vecteur rapporté au n-èdre mobile; on a les relations:

$$X_i = \sum_{k=1}^{k=n} (1_k)_i \xi_k \; ; \qquad X = \sum_{k=1}^{k=n} 1_k \xi_k = \Xi \; .$$
 (1)

Dérivons ces relations par rapport au temps t, les composantes  $\xi_k$  étant considérées comme constantes; il vient:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \frac{d(\mathbf{1}_k)_i}{dt} . \tag{2}$$

Ces expressions donnent les projections de la vitesse du point M considéré, sur les axes fixes; les projections de cette vitesse sur les axes mobiles seront données par:

$$V_m = \sum_{i=1}^{i=n} (1_i)_m \frac{dX_i}{dt} . \tag{3}$$

Tenons compte des relations existant entre les cosinus directeurs des arêtes mobiles; et posons:

$$p_{k,h} = \sum_{i=1}^{i=n} (1_i)_k \frac{d(1_i)_h}{dt} , \quad \text{où} \quad p_{k,h} = -p_{h,k} ; \quad p_{h,h} = 0 ; \quad (4)$$

on obtient, à la place de (3), les formules:

$$V_m = \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k} \xi_k ; \qquad (5)$$

le déterminant des quantités  $p_{k,h}$  est symétrique gauche; nous appellerons ces coefficients  $p_{k,h}$  les rotations instantanées.

6. — Supposons maintenant que l'origine du n-èdre mobile se meuve en translation; et désignons par  $(t_i)$  les translations composantes par rapport aux axes mobiles. Dans le cas où l'on considère le n-èdre principal, seule la translation  $(t_1)$  est différente de zéro.

Soit alors le déplacement le plus général d'un point, mobile lui-même par rapport au polyèdre mobile. Les projections de la vitesse sur les arêtes mobiles seront:

$$V_{m} = \frac{d\xi_{m}}{dt} + t_{m} + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k} \xi_{k} ; \qquad (6)$$

avec, dans le cas principal:

$$t_1 = \frac{ds}{dt} = s'$$
;  $t_i = 0$ ,  $i \neq 1$ .

On a d'ailleurs les relations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} t_k \langle 1_i \rangle_k , \qquad (7)$$

qui s'écrivent comme suit dans le cas principal:

$$\frac{dx_i}{dt} = t_1 (1_i)_1 = s'(1_i)_1 , \qquad (8)$$

où s' est donné en fonction du temps t. On voit qu'on retrouvera les coordonnées  $x_i$  par de simples quadratures, dès qu'on aura déterminé les vecteurs  $(1_i)$  en fonction du temps.

7. — Reprenons les formules (6), et faisons-y les  $(t_m)$  nuls; c'est donc le cas où l'origine est fixe. Prenons comme vecteur  $\Xi$  le vecteur  $1_i$ ; les équations (6) deviennent:

$$0 = \frac{d(1_i)_m}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k} (1_i)_m :$$
 (9)

On a ainsi n groupes de n équations.

8. — Venons-en à la question suivante: Supposons que, d'une

façon ou d'une autre, on ait connaissance de s' et des rotations en fonction du temps; y a-t-il un mouvement correspondant à ces données?

Cela revient à déterminer les  $n^2$  cosinus directeurs du n-èdre mobile; car alors, grâce à (8), on aura les coordonnées  $x_i$  du point  $P_i$ . Or, chacun des n groupes de n cosinus satisfait aux équations:

$$0 = \frac{d(u)_m}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k}(u)_m . \tag{10}$$

On vérifiera aisément la propriété suivante: si (u) et (u') sont deux vecteurs solutions de (10), les expressions

$$|u|^2$$
,  $|u'|^2$ , et  $u^*$ .  $u'$ , (11)

sont des constantes; il suffit de dériver ces quantités par rapport à t, en tenant compte de (10) et de (4); les dérivées sont nulles.

Cette propriété permet de répondre par l'affirmative à la question posée. Soit en effet un *n*-èdre *n*-rectangle de même disposition que le *n*-èdre fixe; ses vecteurs-unités sont:

$$\begin{pmatrix} u_i^c \end{pmatrix}$$
 . (12)

Cherchons alors les solutions de (10) qui ont les valeurs (12) pour valeurs initiales. Les expressions  $|u_i|^2$  et  $u_i$ .  $u_k$  étant constantes (expression 11) et valant respectivement 1 et 0 (valeurs 12), on a chaque instant les vecteurs-unités du n-èdre mobile.

La position initiale (12) est arbitraire; il y a donc une infinité de solutions; au fond, c'est un même déplacement, rapporté à des n-èdres différents.

Conclusion: les fonctions s' et  $p_{m,k}$  étant données, il y correspond un seul mouvement dans  $E_n$ .

9. — Remarque: Quel est, par rapport au n-èdre mobile, le lieu des points de vitesse minima (si ce lieu existe)?

Le vecteur \( \mathbb{E} \) de chaque point est alors constant; on a:

$$V^{2} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[ t_{i} + \sum_{k=1}^{k=1} p_{i,k} \xi_{k} \right]^{2};$$

égalant à zéro les dérivées de  $V^2$  par rapport aux lettres  $\xi$ , on obtient les n équations homogènes:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_{k,i} V_k = 0 , \qquad (i = 1, 2, ..., n) .$$
 (13)

Si le déterminant de (13) est différent de zéro, la solution se réduit à un point de vitesse nulle. Si le déterminant de (13) est nul, les équations (13) se réduisent à (n-1) équations distinctes (les mineurs du déterminant n'étant pas tous nuls); le lieu est alors une variété rectiligne.

Or, le déterminant  $\Delta$  de (13) est symétrique gauche; si n est pair, ce déterminant est en général non nul; si n est impair, il est toujours nul. Si, exceptionnellement,  $\Delta$  était nul, avec n pair, le lieu serait une variété linéaire à plusieurs dimensions.

10. — Revenons au cas général du polyèdre des  $(g_i)$ . Et définissons ce que nous appellerons courbures de la courbe  $\mathcal{C}$  relatives au n-èdre des  $(g_i)$ , ou pseudo-courbures.

Appelons  $dv_i$  les angles de contingence formés respectivement par les axes de même indice de deux n-èdres rectangles voisins. Si ds est l'élément d'arc de  $\mathcal{C}$ , la pseudo-courbure en  $P_1$  relative à  $p_4 = g_4$  sera définie par:

$$C_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{dv_1}{ds} = \frac{v_1'}{s'};$$
 (14)

de même, la pseudo-courbure relative à  $g_i$  sera définie par:

$$C_i = \frac{1}{R_i} = \frac{dv_i}{ds} = \frac{v_i'}{s'}$$
 (15)

D'ailleurs, l'angle  $dv_i$  étant infiniment petit, on a:

$$dv_{i} = \sqrt{\sum_{m=1}^{m=n} \left[ d(1_{i})_{m} \right]^{2}} = d(1_{i}) ; \qquad (16)$$

d'où l'on tire:

$$C_{i} = \frac{dv_{i}}{ds} = \frac{\sqrt{\sum_{i} (1_{i})_{m}^{'2}}}{\sqrt{\sum_{i} x_{h}^{'2}}} = \frac{(1_{i}^{'})}{s'}.$$
 (17)

On définit ainsi n pseudo-courbures pour  $\mathcal{C}$  en  $P_1$ ; nous verrons plus loin les relations qui existent entre ces différentes courbures.

Il suffira de supposer que  $(1_{p_1}) = (1_{g_1})$  coïncide avec le vecteur unité tangent à  $\mathcal{C}$  en  $P_1$  pour obtenir les courbures principales, c'est-à-dire les courbures relatives au n-èdre principal.

11. — D'autre part, on a

$$|1_i|^2 = 1 (18)$$

d'où

$$(1_i) \cdot (1_i') = 0 \; ; \tag{19}$$

donc, le vecteur  $(1_i)$  est perpendiculaire à la droite  $g_i$  du n-èdre relatif à  $p_i$ .

En particulier, pour i=1, c'est-à-dire en considérant la droite  $p_1$  elle-même, on obtient les formules

$$(1_1) \cdot (1_1') = 0$$
 ,  $C_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{(1_1')}{s'}$  . (20)

Remarquons que le vecteur  $(1_1)$  est, dans  $\pi_2$ , porté sur la droite  $g_2$ ; donc, on a:

$$(1_1') = \frac{(1_2)}{k}$$
;

d'où:

$$k = \frac{R_1}{s'}$$
;  $(1_2) = \frac{R_1}{s'} (1_1)'$ . (21)

La relation (21) contient un premier groupe de n formules.

Dans le cas où  $p_1 = g_1$  est la tangente à  $\mathcal{C}$ , on écrira, avec s comme variable indépendante:

$$(\alpha_2) = \rho_1(\alpha_1') \; ; \tag{22}$$

c'est là le cas principal. Si on y fait n=3, on retrouve le premier groupe des formules fondamentales de Frenet.

12. — Considérons maintenant les autres vecteurs du n-èdre rectangle attaché à  $P_1$ ; et cherchons à établir, pour chacun

d'eux, des formules analogues à (21). Celles-ci peuvent s'écrire:

$$(1_1)' = \frac{(1_2)}{\left(\frac{R_1}{s'}\right)};$$
 (23)

les dérivées  $(1_1)'_n$  sont donc linéaires en  $(1_i)_m$ :

$$(1_1)' = \sum_i A_i (1_i)$$
, avec  $A_2 = \frac{1}{\left(\frac{R_1}{s'}\right)}$  et  $A_i = 0$   $(i \neq 2)$ . (23')

Il est facile d'établir que toutes les dérivées  $(1_i)_m$  sont linéaires en  $(1_k)_m$ , k ne pouvant dépasser (i+1).

Remarquons tout d'abord que le vecteur  $(1_{gh})$  appartient au (k+1) — plan  $\pi_{k+1}$ ; et, d'après la façon dont nous avons choisi les vecteurs du n-èdre rectangle en  $P_1$ , il vient la forme:

$$(1_h) = \sum_{i=0}^{i=h} B_i (1_1)^{(i)} : \qquad (24)$$

en effet, le n-èdre rectangle en  $P_1$  est une équibase du n-èdre formé par les vecteurs  $(1_{p_i})$ .

Supposons alors que la forme linéaire de  $(1_i)'$  ait été établie jusqu'à la valeur i de l'indice; et démontrons que la propriété s'étend au cas de (i + 1). On a par hypothèse:

$$(\mathbf{1}_{i})' = \sum_{k=1}^{k=i+1} \mathbf{D}_{k}(\mathbf{1}_{k})$$
 (25)

Par différentiations successives de (23'), on tire, à cause de (25):

$$(\mathbf{1}_{1})^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{h=i+1} \mathbf{E}_{k}(\mathbf{1}_{k}) ; \qquad (26)$$

relations d'ailleurs équivalentes aux équations (24). D'autre part, l'équation (24) donne, avec k = i + 2:

$$(1_{i+2}) = \sum_{s=0}^{s=i+2} B_s(1_1)^s$$
;

portons dans le deuxième membre les valeurs (26); il reste le dernier terme en  $(1_4)^{(i+2)}$ ; on obtient la forme:

$$(1_{i+2}) = \sum_{s=0}^{s=i+1} b_s (1_{s+1}) + B_{i+2} (1_1)^{(i+2)} .$$
 (27)

Mais, en dérivant (26), on trouve justement  $(1,)^{(i+2)}$ :

$$(\mathbf{1}_{1})^{(i+2)} = \sum_{k=1}^{k=i+1} \mathbf{F}_{k}(\mathbf{1}_{k}) + \mathbf{E}_{i+1}(\mathbf{1}_{i+1})'.$$
 (28)

Portons cette valeur (28) dans (27); explicitant  $(1_{i+1})'$ , il vient:

$$(1_{i+1})' = \sum_{k=1}^{k=i+2} Q_k(1_k)$$
 (29)

La forme (25) est donc vraie pour toute valeur de l'indice i; nous écrirons plus en détail:

$$(1i)' = \sum_{k=1}^{k=i+1} \frac{(1_k)}{q_{i,k}}; \tag{30}$$

et on sait que:

$$q_{\scriptscriptstyle 1,1} = \infty$$
 et  $q_{\scriptscriptstyle 1,2} = \frac{\mathrm{R}_{\scriptscriptstyle 1}}{s'}$  .

13. — Il s'agit maintenant de trouver la valeur des coefficients  $\left(\frac{1}{q_{\alpha,\beta}}\right)$ .

On a les relations connues:

$$|\,\mathbf{1}_i\,|^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{1}_i) \,.\, (\mathbf{1}_k) = 0 \ ,$$

d'où l'on tire:

$$(\mathbf{1}_{i}) \cdot (\mathbf{1}_{i})' = 0$$
 et  $(\mathbf{1}_{i})' \cdot (\mathbf{1}_{k}) + (\mathbf{1}_{i}) \cdot (\mathbf{1}_{k})' = 0$ ;

avec les relations (30), on obtient immédiatement les égalités:

$$\frac{1}{q_{i,i}} = 0 \; ; \quad q_{i,j} = -q_{j,i} \qquad (i \neq j) \; ; \tag{31}$$

le déterminant des quantités  $\left(\frac{1}{q_{\alpha,\beta}}\right)$  est donc symétrique gauche.

Or, nous avons établi (formule 30) que le deuxième indice ne peut dépasser le premier de plus d'une unité; il résulte alors de (31) que le deuxième membre de (30) se réduit à deux termes:

$$(\mathbf{1}_{i})' = -\frac{(\mathbf{1}_{i-1})}{q_{i-1,i}} + \frac{(\mathbf{1}_{i+1})}{q_{i,i+1}}; \tag{32}$$

lorsque i = n, on a:  $\frac{1}{q_{n,n+1}} = 0$ .

Il reste donc à déterminer la valeur de deux coefficients. Pour cela, partons des définitions (15) des pseudo-courbures et rayons de courbure:

$$C_i = \frac{1}{R_i} = \frac{(1_i)'}{|s'|}; \qquad \frac{1}{R_i^2} = \frac{|1_i'|^2}{s'^2};$$
 (33)

à cause de (32), on trouve la formule de récurrence:

$$|1'_{i}|^{2} = \frac{1}{q_{i-1,i}^{2}} + \frac{1}{q_{i,i+1}^{2}} = \frac{s'^{2}}{R_{i}^{2}};$$

$$\frac{1}{q_{i,i+1}^{2}} = \frac{s'^{2}}{R_{i}^{2}} - \frac{1}{q_{i-1,i}^{2}}.$$
(34)

On a donc finalement:

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{q_{1,2}^2} = \frac{s'^2}{R_1^2}; & \frac{1}{q_{i,i,+1}^2} = s'^2 \sum_{k=i}^{k=1} (-1)^{i-k} \frac{1}{R_k^2}; \\
\frac{1}{q_{n-1,n}^2} = s'^2 \sum_{k=n-1}^{k-1} (-1)^{n-1-k} \frac{1}{R_k^2} = \frac{s'^2}{R_n^2}.
\end{cases} (35)$$

On connaît ainsi tous les coefficients des formules (32); (voir encore les paragraphes 14 et 16).

La dernière formule (35) montre que la  $n^e$  pseudo-courbure dépend des (n-1) pseudo-courbures précédentes:

$$\frac{1}{R_n^2} = \sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-1-k} \frac{1}{R_k^2} . \tag{36}$$

Remarque: Dans le cas où  $(1_{p_1})$  est le vecteur-unité tangent à

la courbe C, on écrira  $\rho$  au lieu de R; ou bien, en désignant par  ${}_{\iota}C_{\iota}$  les courbures principales:

$${}_{t}C_{n}^{2} = \sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-1-k} {}_{t}C_{k}^{2} ; \qquad (37)$$

on retrouve là une formule donnée par Hoppe <sup>1</sup> et Cesaro <sup>2</sup>.

14. — On a donc en définitive les relations suivantes:

où l'on a choisi le signe (+) pour le radical, ce qui correspond à la direction positive sur les axes  $g_i$ . Pour le dernier coefficient, par contre, on a:

$$\frac{1}{q_{n-1,n}} = \pm s' \left( \sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-k-1} \frac{1}{R_k^2} = \frac{s'}{R_n} \right); \tag{39}$$

nous indiquerons au n° 16 comment décider entre les deux signes. Pour simplifier l'écriture, posons maintenant:

$$\frac{1}{q_{i,i+1}} = \frac{1}{T_i} ;$$

les formules (32) deviennent:

$$(1_i)' = -\frac{(1_{i-1})}{T_{i-1}} + \frac{(1_{i+1})}{T_i} , \qquad (40)$$

avec

$$\frac{1}{T_1} = \frac{s'}{R_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{T_n} = 0 \ .$$

Rappelons que, réciproquement, connaissant tous les vecteurs

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Hoppe. Archiv der Math. u. Phys., 1888.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> CESARO. Natürliche Geometrie, Leipzig, 1891.

(1<sub>i</sub>) en fonction du temps, on trouvera vite la courbe du point P<sub>1</sub> (voir § 6).

15. — Passons au cas remarquable ou  $(1_{p_1})$  est le vecteur tangent à  $\mathcal{C}$ . On a pour le vecteur-unité tangent:

$$(\alpha_1)_m = \frac{dx_m}{dx} = \frac{x'_m}{s'};$$

d'où:

$$_{t}C_{1} = \frac{1}{\rho_{1}} = \frac{1}{s'} \left| \sum_{m=1}^{m=n} (\alpha_{1})_{m}^{\prime 2} = \frac{dv_{1}}{ds} \right|;$$

donc  $\rho_1$  est connu. La formule (22) donne alors, avec t comme variable:

$$s'. (\alpha_2) = \rho_1 (\alpha_1)' ;$$

le deuxième vecteur-unité est donc connu. Cela permet d'obtenir la deuxième courbure principale:

$$_{t}C_{2}=\frac{(\alpha_{2})'}{s'}=\frac{1}{\varrho_{2}}$$
 .

D'autre part, les formules (40) deviennent:

$$(\alpha_i)' = -\frac{(\alpha_{i-1})}{\tau_{i-1}} + \frac{(\alpha_{i+1})}{\tau_i},$$
 (40')

avec

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{s'}{\rho_1}$$
,  $\frac{1}{\tau_n} = 0$ , et  $\frac{1}{\tau_i} = s'$   $\sum_{k=i}^{k=1} (-1)^{i-k} \frac{1}{\rho_k^2}$ ;

on aura donc tous les  $\tau_i$ , et partant tous les vecteurs-unités du n-èdre mobile (réciproque, voir § 6).

Si, dans ces formules, on fait n=3, on retrouve les formules fondamentales de Frenet.

16. — Il reste à fixer le signe du radical de la formule (39). Etudions le déterminant:

$$D = \| (1_1)_m (1_1)_m' (1_1)_m'' \dots (1_1)_m^{(n-1)} \| ;$$

il possède un signe bien déterminé; les différents termes en sont donnés par l'expression (26):

$$(\mathbf{1}_{\mathbf{1}})^{(i)} = \sum_{k=1}^{k=i} \mathbf{E}_k(\mathbf{1}_k) ;$$

écrivons-la comme suit:

$$(\mathbf{1}_{1})^{(i)} = \sum_{k=1}^{k=i-1} \mathbf{B}_{k}(\mathbf{1}_{k}) + \mathbf{E}_{i}(\mathbf{1}_{i}) ; \qquad (41)$$

une nouvelle dérivation donne la forme:

$$(\mathbf{1}_{1})^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{k=i} \mathbf{A}_{k} (\mathbf{1}_{k}) + \mathbf{E}_{i} (\mathbf{1}_{i})' ;$$

et, si l'on tient compte de la formule (32), on trouve pour le dernier coefficient, E<sub>i</sub>, la formule de récurrence:

$$E_{i+1} = E_i \left( \frac{1}{q_{i,i+1}} \right)$$
; (42)

Or, on a 1:

$${\bf E_1} = {1 \over q_{_{1,2}}} \qquad {
m et} \qquad {\bf E_2} = {1 \over q_{_{1,2}} \, q_{_{2,3}}} \; ;$$

d'où pour  $E_i$ :

$$E_{i} = \frac{1}{q_{1.2}} \cdot \frac{1}{q_{2.3}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{q_{i-1,i}} . \tag{43}$$

Portons les formules (41) dans le déterminant D; combinant linéairement les colonnes, il vient l'expression:

$$\mathbf{D} = \left(\prod_{i=1}^{i=n-1} \mathbf{E}_i\right) \cdot \| (\mathbf{1}_k)_m \| = \prod_{i=1}^{i=n-1} \mathbf{E}_i ;$$

$$(1_1)' = \frac{s'}{R_1}(1_2) = \frac{(1_2)}{q_{1,2}};$$
 puis  $(1_1)'' = \left(\frac{1}{q_{1,2}}\right)'(1_2) + \frac{(1_2)'}{q_{1,2}};$ 

or:  $(1_2)' = -\frac{(1_1)}{q_{1,2}} + \frac{(1_3)}{q_{2,3}}$  à cause de  $(3_2)$ ; donc finalement:

$$(1_1)'' = \left(\frac{1}{q_{1,2}}\right)'(1_2) + \frac{1}{q_{1,2}} \cdot \left[-\frac{(1_1)}{q_{1,2}} + \frac{(1_3)}{q_{2,3}}\right].$$

<sup>1</sup> En effet:

et, à cause de (43):

$$D = \prod_{i=1}^{i=n-1} \cdot \left(\frac{1}{q_{i-1,i}^{n-i}}\right); \qquad (44)$$

or, toutes les quantités  $\left(\frac{1}{q_{h,h+1}}\right)$  sont positives, jusqu'à la valeur k=n-2; seul, le signe de la dernière de ces quantités,  $\left(\frac{1}{q_{n-1,n}}\right)$ , est encore inconnu; la formule (44) le détermine, puisque le signe de D est déterminé. On définit ainsi complètement la direction positive sur le dernier axe  $g_n$  du n-èdre rectangle qui accompagne  $(1_{p_1})$ .

Remarque. — Il est évident qu'on pourrait étudier la courbe  $\mathcal{C}$  au moyen des représentations sphériques des n arêtes du n-èdre attaché au point  $P_1$ , soit pour le cas général de  $(1_{p_1})$ , soit pour le cas fondamental de  $(1_{g_1})$ . Cela reviendra encore à porter, sur chaque axe du n-èdre rectangle mobile autour de l'origine, un vecteur-unité  $(1_i)$ . (Nos 5, 7, 8.)

## SUR LES FORMULES DE LORENTZ

PAR

### B. Niewenglowski (Paris).

Je me propose d'établir les hypothèses nécessaires et suffisantes pour conduire aux formules de la relativité restreinte.

Je conserve les notations de M. E. Picard dans sa très intéressante Notice de l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1922. La droite  $X'\Omega X$  glisse sur la droite x'Ox avec une vitesse constante  $\rho$ ; ces deux droites sont de même sens. Un observateur est lié à chacune de ces droites; il y a pour chacun d'eux un temps local: t pour l'observateur fixe, T pour le second. On suppose t=T=0 quand  $\Omega$  coıncide avec O. Un même point