§ 1. — Etude sommaire de deux quartiques planes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES
DE LA
CRISTALLOGRAPHIE [1]

PAR

Marcel WINANTS (Liége).

CHAPITRE II.

Etude succincte d'une surface cubique à quatorze ombilics et d'une surface quadratique.

§ 1. — Etude sommaire de deux quartiques planes.

48. — Sauf expresse indication du contraire, les axes coordonnés formeront des angles droits.

Soit d'abord la courbe:

$$x^4 + y^4 = a^4 .$$

Elle admet un centre à l'origine. Les axes coordonnés et les bissectrices de leurs angles sont quatre axes de symétrie. Il existe un Λ^4 perpendiculaire au plan de la courbe.

La courbe est extérieure au cercle $X^2 + Y^2 = a^2$, sauf qu'elle le touche aux points où elle rencontre les axes coordonnés. En effet, on a:

$$(x^2 + y^2)^2 \geqq x^4 + y^4 = (X^2 + Y^2)^2 .$$

49. — Appelons δ la distance de l'origine au point (x, y) de la courbe:

$$\delta^2 = x^2 + y^2 , \qquad \delta^4 = a^4 + 2x^2y^2 ;$$

δ sera maximum pour $x = \pm y$.

---

[1] Voir l'*Enseign. mathém.*, t. XXII, nos 1-2, p. 5-29.

50. — Nous allons étudier la courbure de cette quartique. Deux dérivations successives de son équation conduisent à:

$$x^3 + y^3 y' = 0 \ , \qquad 3x^2 + 3y^2 y'^2 + y^3 y'' = 0 \ .$$

On en tire:

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \ , \qquad y'' = -\frac{3a^4 x^2}{y^7} \ .$$

La courbe tourne sa concavité vers le bas ou vers le haut suivant que l'ordonnée est positive ou négative. Ensuite, on a:

$$1 + {}'^2 = \frac{x^6 + y^6}{y^6} \ ;$$

le rayon de courbure est donc égal à:

$$\rho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(x^6 + y^6)^{\frac{3}{2}}}{3a^4 x^2 y^2} \ .$$

En annulant l'abscisse ou l'ordonnée, (elles ne peuvent d'ailleurs pas s'annuler en même temps), on trouve:

$$\rho = \infty \ .$$

Le quartique a donc quatre points d'ondulation. De l'équation même de la courbe, il résulte d'ailleurs qu'elle est rencontrée par chacune des droites $y = \pm a$, $x = \pm a$, en quatre points confondus.

51. — La quartique précédente a la symétrie d'un carré.

52. — Passons à la quartique: $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. On raisonnera comme pour la précédente. Elle est extérieure à l'ellipse: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, sauf qu'elle la touche aux points où elle rencontre les axes coordonnés. Ces quatre sommets sont des points d'ondulation.

53. — Cette quartique possède, comme l'ellipse, la symétrie d'un rectangle. Les deux courbes admettent tous les éléments de symétrie du système orthorhombique. Le plan d'une courbe plane peut être envisagé comme un plan de symétrie de la figure.