Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE

Kapitel: § 2. — Une surface ayant la symétrie d'un cube.

Autor: Winants, Marcel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515738

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 14.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 2. — Une surface ayant la symétrie d'un cube.

54. — Nous allons nous occuper de la surface:

$$x^4 + y^4 + z^4 = p^4 .$$

Elle est extérieure à la sphère:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = p^2 ,$$

sauf qu'elle la touche aux six points où les deux surfaces coupent les axes coordonnés (qui sont rectangulaires).

La forme même de l'équation montre que la surface admet la symétrie du cube:

$$\begin{array}{c} C ,\ 3\Lambda^4 ,\ 4\Lambda^3 ,\ 6\Lambda^2 , \\ 3P , \qquad 6P' . \end{array}$$

Les axes quaternaires de symétrie sont les axes coordonnés; et les plans P sont les plans coordonnés. Les axes ternaires ont pour équations: $x = \pm y = \pm z$. Les axes binaires sont les bissectrices des angles que font les axes coordonnés; et les plans P' bissèquent les dièdres coordonnés.

55. — Les points où cette surface est rencontrée par ses axes ternaires et ses axes quaternaires, sont des ombilics (21). Nous allons essayer de le vérifier par un calcul direct. Nous avons rappelé plus haut (22) les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des ombilics:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial x} \times \dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} .$$

Pour la surface actuelle, calculons les dérivées premières et secondes de z. On a:

$$x^3 + z^3 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 ; \qquad y^3 + z^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 ;$$

$$3x^2 + 3z^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 ;$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + z^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0 .$$

De ces équations, on tire successivement:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^3}{z^3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^3}{z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{3x^3y^3}{z^7};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3x^2(x^4+z^4)}{z^7}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{3y^2(y^4+z^4)}{z^7}.$$

Les équations aux coordonnées des ombilics sont donc:

$$\frac{x^2(x^4+z^4)}{x^6+z^6} = \frac{x^3y^3}{x^3y^3} = \frac{y^2(y^4+z^4)}{y^6+z^6},$$

c'est-à-dire: $x^2 = y^2 = z^2$.

Cette méthode semble ne donner que les extrémités des axes ternaires. Mais, à un certain moment, on a simplifié par une puissance de z. D'ailleurs, les ombilics, extrémités des axes quaternaires, ont, chacun, deux coordonnées nulles. Il peut donc arriver que notre méthode l'emporte sur la méthode classique.

N'existe-t-il pas d'autres ombilics ? Une transformation des coordonnées rectilignes fournirait la réponse à cette question.

56. — La courbure totale (43) est ici:

$$k = \frac{\dfrac{9x^2y^2(x^4+z^4)(y^4+z^4)}{z^{14}} - \dfrac{9x^6y^6}{z^{14}}}{\left\{1 + \dfrac{x^6}{z^6} + \dfrac{y^6}{z^6}\right\}^2} = \frac{9p^4x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2}.$$

Par raison de continuité, cette formule s'applique également aux points où la surface rencontre les plans coordonnés.

La courbure est ordinairement positive; mais elle s'annule tout le long des trois sections principales. Cette propriété est entièrement conforme à la symétrie.

§ 3. — Une surface quadratique.

57. — Il va s'agir de la surface: $\dfrac{x^4+y^4}{a^4} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$, où l'on suppose $a \neq c$. Cette surface n'est pas de révolution; elle est extérieure à l'ellipsoïde de révolution: $\dfrac{X^2+Y^2}{a^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$, sauf qu'elle le touche en six points (52).