§ 4. — De nouvelles cubiques planes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

de ces régions, la courbure totale est positive; dans les trois autres, elle est négative.

L'ensemble des trois sections principales constitue le lieu géométrique des points paraboliques.

Tout ceci est conforme à la symétrie.

§ 4. — De nouvelles cubiques planes.

75. — Dans les deux paragraphes qui vont suivre, nous donnerons moins de détails que dans les deux précédents.

Examinons d'abord la cubique plane:

$$x^2 y + c y^2 + c^2 x = p^3 \ , \qquad \text{(E)}$$

où l'on peut supposer $p > 0$. L'hypothèse $c = 0$ nous ramène à la cubique [5°, c]: $x^2 y = p^3$, que nous avons indiquée plus haut (26).

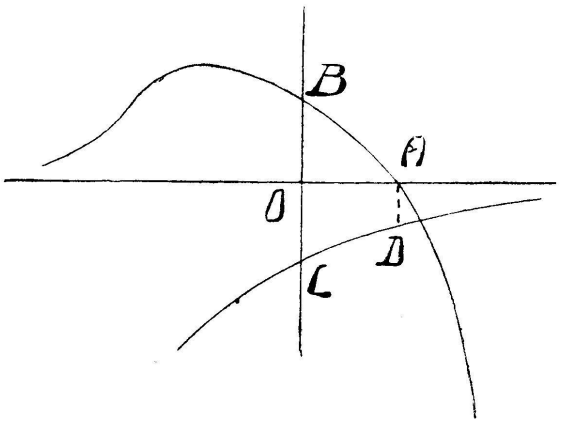

Fig. 11.

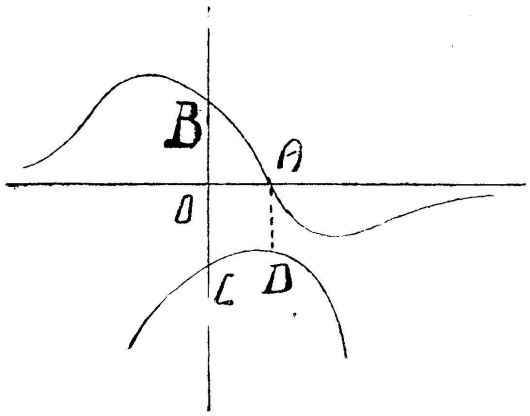

Fig. 12.

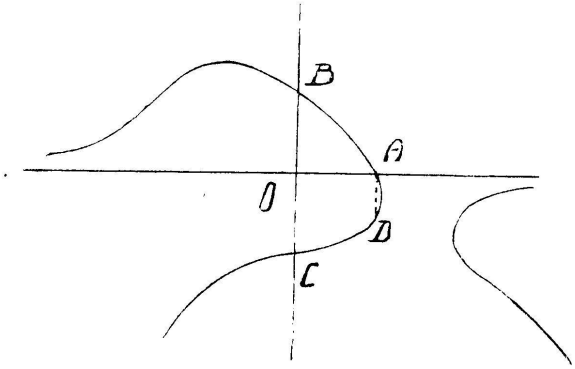

Fig. 13.

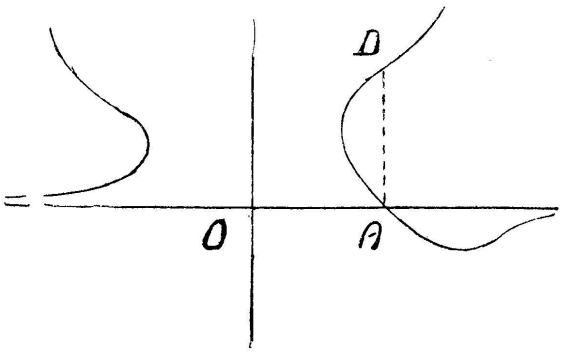

Fig. 14.

Fig. 11 : $3c^3 = 4p^3$.

Fig. 12 : $0 < 3c^3 < 4p^3$.

Fig. 13 : $3c^3 > 4p^3$.

Fig. 14 : $c < 0$.

76. — Cette cubique, quelle que soit la constante c, est tangente à la droite de l'infini, et admet l'axe des x comme asymptote. Rencontre-t-elle les axes coordonnés ? L'hypothèse $y = 0$ entraîne:

$$x = \frac{p^3}{c^2} > 0 \ ;$$

donc la courbe rencontre toujours son asymptote à distance finie, une seule fois, à droite de l'origine (A). De même, $x = 0$ donne:

$$y = \pm \sqrt{\frac{p^3}{c}} \ ;$$

la courbe ne rencontre pas l'axe des y quand c est < 0 (fig. 14); dans le cas contraire (fig. 11, 12, 13), elle le rencontre en deux points (B, C) symétriques par rapport à l'origine. Quand c est < 0, la cubique ne possède aucun point dans l'angle des axes où les deux coordonnées sont négatives (fig. 14).

En résolvant l'équation (E), on trouve:

$$2cy = -x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4c^3x + 4cp^3} \ ; \qquad (1)$$

$$2xy = -c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4p^3y - 4cy^3} \ . \qquad (2)$$

On en conclut l'existence de deux coniques diamétrales, conjuguées aux cordes asymptotiques:

$$x^2 + 2cy = 0 \qquad \text{parabole ;}$$

$$2xy + c^2 = 0 \qquad \text{hyperbole équilatère.}$$

77. — La cubique peut-elle admettre un point double à distance finie ? Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir simultanément:

$$f \equiv x^2y + cy^2 + c^2x - p^3 = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + c^2 = 0 \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2cy = 0 \ .$$

Les deux coniques diamétrales doivent donc se couper sur la cubique. En éliminant x, y entre les trois équations précédentes, on trouve : $3c^3 = 4p^3$. On obtient alors la cubique crunodale, que représente la fig. 11 (page 182). C'est une cubique [4°, c].

78. — Discutons d'abord la formule (2). La quantité subradicale est un polynome du troisième degré, qui ne doit prendre que des valeurs positives. Le coefficient de y^3 est $-4c$. Quand c est > 0, il y a donc un maximum pour y; on sait, en effet, que, pour des valeurs de la variable, de module suffisamment grand, tout polynome a le signe du terme où l'exposant de la variable est le plus élevé (fig. 11, 12, 13). Quand c est < 0, il existe un minimum de y (fig. 14).

Le polynome dont nous nous occupons, peut d'ailleurs s'écrire:

$$-4c\left(y^3 - \frac{p^3}{c}y - \frac{c^3}{4}\right).$$

Le discriminant de la parenthèse est:

$$\frac{c^6}{64} - \frac{p^9}{27c^3} = (3c^3 - 4p^3) \times \frac{9c^6 + 12c^3p^3 + 16p^6}{64 \times 27c^3}.$$

Si l'on raisonne comme pour le trinome du second degré, l'on arrive aux conclusions suivantes:

1° $0 < 3c^3 < 4p^3$: y admet un minimum et deux maxima (fig. 12);

2° $3c^3 > 4p^3$: y admet un seul maximum;

3° $c < 0$: y admet un seul minimum.

79. — De la formule (1), page 48, nous pourrons déduire quelques résultats analogues. Soit $f(x)$ le polynome subradical. L'équation.

$$f(x) \equiv x^4 - 4c^3x + 4cp^3 = 0$$

admet au moins deux racines imaginaires (théorème des lacunes).

Quand c est < 0 (fig. 14), l'équation a deux racines réelles, de signes contraires, entre lesquelles l'abscisse variable ne peut pas être comprise.

Supposons que c soit > 0. Si deux racines sont réelles, elles sont positives (Théorème de Descartes). Cherchons quand ce dernier fait se produit: le minimum de $f(x)$ doit être négatif. Or on a:

$$f'(x) = 4(x^3 - c^3) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad x = c;$$

quand les deux racines sont réelles, elles comprennent c (Théorème de Rolle); ensuite:

$$f''(x) = 12x^2 \; ; \quad f''(c) = 12c^2 > 0 \; ;$$
$$f(c) = c^4 - 4c^4 + 4cp^3$$
$$= - c(3c^3 - 4p^3) \; .$$

Dans le cas des fig. 11 et 12 (page 182), le minimum de $f(x)$ n'est pas négatif; l'abscisse x peut varier de $-\infty$ à $+\infty$. Dans le cas des fig. 13 et 14, il existe un intervalle où la variable ne peut pas entrer.

80. — Voici les coefficients angulaires de quelques tangentes:

$$m = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{2xy + c^2}{x^2 + 2cy} \; ;$$

$$m_A = - \frac{c^2}{\frac{p^6}{c^4}} = - \frac{c^6}{p^6} < 0 \; ;$$

$$m_{B,C} = - \frac{c^2}{\pm 2c\sqrt{\frac{p^3}{c}}} = \mp \frac{c^2}{2\sqrt{cp^3}} \lessgtr 0 \; ,$$

les tangentes aux points B, C, se coupent sur l'asymptote.

Remarque. — La parallèle menée à l'axe des y, par le point A rencontre la courbe en un point D, de coordonnées:

$$x = \frac{p^3}{c^2} \; , \qquad y = - \frac{p^6}{c^5} \; .$$

81. — Résumons ce qui précède dans un tableau synoptique:

$c < 0$: unipartite non singulière [2°, c];

$c = 0$: cuspidale [5°, c];

$0 < c < p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: bipartite [1°, c];

$c = p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: crunodale [4°, c];

$c > p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: unipartite non singulière [2°, c].

La recherche des points d'inflexion nous entraînerait trop loin.

82. — Passons à la cubique:

$$\beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta = m^3 \tag{1}$$

Elle va nous fournir l'occasion d'appliquer l'un de nos principes généraux (Chapitre III).

D'après ce qu'on a vu plus haut (62), cette cubique admet trois asymptotes, que nous allons, tout d'abord, rechercher.

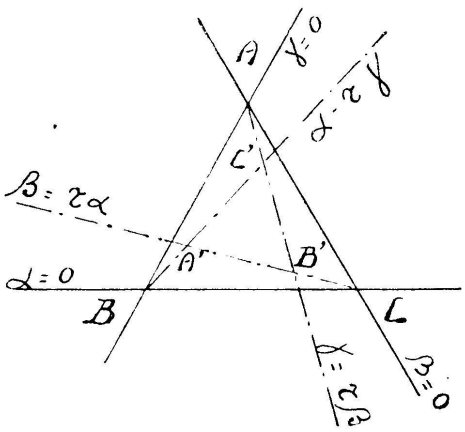

Fig. 15.

Par le sommet A, on peut mener trois droites asymptotiques, dont une seule pénètre à l'intérieur du triangle de référence; soit $\gamma = r\beta$ son équation; r est > 0; le système:

$$\beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta = m^3 , \qquad \gamma = r\beta ,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = h .$$

doit admettre des solutions infinies. On élimine α et γ; on trouve une équation du troisième degré en β; on doit annuler le coefficient de β^3; il vient:

$$F(r) \equiv r^3 - 3r - 1 = 0 ; \tag{2}$$

cette équation admet une et une seule racine positive (Théorème de Descartes); son discriminant est:

$$\frac{1}{4} - \frac{27}{27} = -\frac{3}{4} < 0 ;$$

les trois racines sont donc réelles; il fallait s'y attendre.

La racine positive est supérieure à l'unité, car $F(1) < 0$. Cette racine est indépendante de m.

83. Nous allons effectuer une transformation des coordonnées trilinéaires absolues. Menons les trois droites:

$$\gamma = r\beta ; \qquad \alpha = r\gamma ; \qquad \beta = r\alpha .$$

Elles déterminent un triangle équilatéral A'B'C', que nous prenons comme nouveau triangle de référence. Dans le « Cours de Géométrie analytique plane » de Falisse, 7e édition, revue et augmentée par A. Gob, Bruxelles, 1912, à la page 578, au nº 735,

on donne une formule qui exprime la distance δ d'un point de coordonnées α, β, γ, à la droite que représente l'équation:

$$\Sigma u\alpha \equiv u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \ ;$$

à savoir:

$$\delta = \frac{\Sigma u\alpha}{\sqrt{\Sigma u^2 - 2\Sigma uv \cos C}} \ .$$

Les angles du triangle primitif sont:

$$A = B = C = 60^\circ \ ;$$

donc:

$$\delta = \frac{\Sigma u\alpha}{\sqrt{\Sigma u^2 - \Sigma uv}} \ .$$

Le côté B′C′ a pour équation: $r\beta - \gamma = o$;

$$u = 0 \ , \qquad v = r \ , \qquad w = -1 \ ;$$

il vient:

$$\alpha' = \frac{r\beta - \gamma}{\sqrt{r^2 + 1 + r}} = \frac{r\beta - \gamma}{\sqrt{r^2 + r + 1}} \ .$$

Posons

$$\varepsilon \equiv \sqrt{r^2 + r + 1} = \text{constante positive} \ ;$$

il en résulte:

$$r\beta - \gamma = \varepsilon\alpha' \ , \qquad r\gamma - \alpha = \varepsilon\beta' \ , \qquad r\alpha - \beta = \varepsilon\gamma' \ .$$

En résolvant ces trois équations, on trouve:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon}{3r}(r\alpha' + \beta' + r^2\gamma') \ . \\ \beta &= \frac{\varepsilon}{3r}(r^2\alpha' + r\beta' + \gamma') \ , \\ \gamma &= \frac{\varepsilon}{3r}(\alpha' + r^2\beta' + r\gamma') \ . \end{aligned} \right.$$

On substitue ces valeurs dans l'équation (1), et l'on obtient

$$\begin{aligned} & r(2r + 1)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma) \\ & + 3(r^2 + 3r + 1)(\beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = \frac{9m^3r^3}{\varepsilon^3} \ . \end{aligned}$$

On a tenu compte de l'équation (2). On a supprimé les accents, devenus inutiles.

La cubique a donc trois axes de symétrie ordinaire; ce sont les bissectrices intérieures du triangle A'B'C'. Ces axes ont une direction qui ne dépend nullement de m.

84. — On peut simplifier la dernière équation. On a:

$$h^3 = (\alpha + \beta + \gamma)^3 = \Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\alpha\beta\gamma \ ,$$

d'où l'on tire:

$$3\Sigma\alpha^2\beta = h^3 - (\Sigma\alpha^3 + 6\alpha\beta\gamma) \ ;$$

l'équation de la cubique peut enfin s'écrire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 \gtreqless 0 \ .$$

85. — Recherchons les asymptotes. D'après ce qui précède, il existe une asymptote parallèle au nouveau côté B C.

$$\alpha = \text{constante} \ .$$

En combinant les deux équations:

$$\beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 - \alpha^3 \ , \qquad \beta + \gamma = h - \alpha \ , \qquad \text{(J)}$$

on obtient:

$$(h - \alpha)\,[(h - \alpha)^2 - 3\beta\gamma] + 6\alpha\beta\gamma = k^3 - \alpha^3 \ .$$

Le coefficient de $\beta\gamma$ est:

$$-3(h - \alpha) + 6\alpha = 3(3\alpha - h) = 0 \ .$$

Les équations des asymptotes sont donc:

$$\alpha = \frac{h}{3} \ ; \qquad \beta = \frac{h}{3} \ ; \qquad \gamma = \frac{h}{3} \ .$$

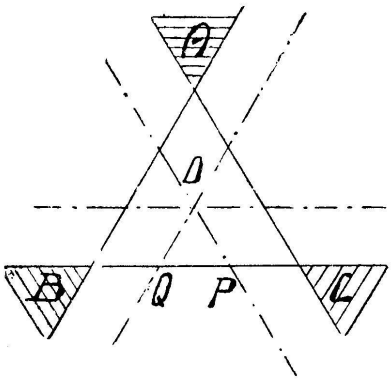

Fig. 16

La cubique a donc trois asymptotes concourantes.

86. — Comment la cubique rencontre-t-elle les côtés du triangle fondamental ? Si, dans les équations (J), on suppose $\alpha = 0$, on obtient:

$$h\,(h^2 - 3\beta\gamma) = k^3 \ , \quad \text{d'où} \quad \beta\gamma = \frac{h^3 - k^3}{3h} \ ;$$

mais:

$$\beta + \gamma = h \ .$$

Les coordonnées β, γ, sont donc racines de l'équation:

$$z^2 - hz + \frac{h^3 - k^3}{3h} = 0 \ , \qquad (1)$$

dont le discriminant est:

$$h^2 - 4\frac{h^3 - k^3}{3h} = \frac{4k^3 - h^3}{3h} \ .$$

La cubique est tangente aux côtés si l'on a:

$$k^3 = \frac{h^3}{4} \ .$$

87. — Quand la cubique passe-t-elle en P ? Il faut que l'équation (1) ait la solution $z = \frac{h}{3}$. Alors:

$$k^3 = \frac{h^3}{3} \ .$$

On peut vérifier directement que, dans ce dernier cas, la cubique dégénère en un système de trois droites:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 = \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)^3 \ ,$$

ou

$$3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma) - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = 0 \ ,$$

ou encore:

$$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) = 0 \ , \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Mais

$$2\alpha - \beta - \gamma = 3\alpha - h \ ;$$

On a donc trois parallèles aux côtés du triangle fondamental, menées par son centre.

88. — La cubique est circonscrite au triangle A B C, si l'on a: $k^3 = h^3$; elle rencontre les trois côtés si $k^3 > \frac{h^3}{4}$; elle ne les rencontre pas si $k^3 < \frac{h^3}{4}$. Quand elle les rencontre, c'est en des points pour lesquels on a:

$$\beta\gamma = \frac{h^3 - k^3}{3h} \ .$$

En mettant à part le cas de la dégénérescence, on a toujours affaire à une cubique [2°, a], qui satisfait aux règles de la symétrie autour d'un Λ^3 (62).

89. — Donnons un tableau-résumé de la discussion qui précède:

$k^3 > h^3$: Rencontre les prolongements des côtés. Chacune des trois branches entoure une région hachurée;

$k^3 = h^3$: Circonscrite au triangle ABC;

$\frac{h^3}{3} < k^3 < h^3$: Rencontre les côtés (entre P et C);

$k^3 = \frac{h^3}{3}$: Trois droites concourantes (dégénérescence);

$\frac{h^3}{4} < k^3 < \frac{h^3}{3}$: Rencontre les côtés (entre P et Q);

$k^3 = \frac{h^3}{4}$: Tangente aux trois côtés;

$k^3 < \frac{h^3}{4}$: Ne rencontre pas les côtés.

Toujours trois asymptotes concourantes.

§ 5. — **Une deuxième surface.**

90. — Nous allons esquisser une théorie de la surface:

$$y^2 z + z^2 x + x^2 y = p^3 \ . \qquad (p > 0)$$

Elle admet certainement un axe de symétrie ternaire, d'équations:

$$x = y = z \ .$$

Elle ne rencontre aucun des axes coordonnés, ne pénètre pas dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle coupe les plans coordonnés suivant trois cubiques [5°,c], analogues à celle que nous avons étudiée plus haut (26, 75):

$$x = 0 \ , \qquad y^2 z = p^3 \ ;$$
$$y = 0 \ , \qquad z^2 x = p^3 \ ;$$
$$z = 0 \ , \qquad x^2 y = p^3 \ .$$

91. — Un plan parallèle à l'un des plans coordonnés ($z = c$), fournit, comme section, la cubique:

$$x^2 y + c y^2 + c^2 x = p^3 \ ,$$