

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DE L'EXPRESSION POUR LE RAYON DE COURBURE

Autor(en): **Child, J. M. / Petronievics, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515740>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DE L'EXPRESSION POUR LE RAYON DE COURBURE

PAR

J. M. CHILD (Manchester) et B. PETRONIEVICS (Belgrade).

Ayant envoyé l'article qui précède, en langue serbe, à Monsieur J. M. CHILD, professeur à l'Université de Manchester, j'ai reçu de lui la lettre suivante:

«..... I was very interested in the pamphlet you sent me. Of course, I could not follow all the argument, printed as it was in Serbian; and I consider it a very good idea to republish it, with further developments, in French. Here is a little theorem in infinitesimal geometry of the same kind, which, as far as I am aware, is new. It leads directly to the value of the radius of curvature in Cartesian Coordinates. Perhaps you would care to treat it more rigorously according to the method of the pamphlet; if so I should be honoured if you would include it in your French publication as one of the further developments.

Yours very sincerely,

J. M. Child.»

La première partie de cet article contient la traduction de la part de collaboration importante de M. Child, mentionnée dans sa lettre; dans la deuxième, j'ai appliqué à sa fig. 1 ma méthode géométrique.

I

Théorème. — Dans la fig. 1 ABC représente la tangente au point A d'un cercle de centre O; OB et OC coupent ce cercle en des points P et Q.

Soit QT une tangente au point Q , coupant ABC en T . Tirez $BD \perp OC$. De P tirez $PR \parallel AC$ coupant QT en S ; de même tirez $PW \perp OC$ et, par Q , $QR \perp PR$. On aura alors:

$$\frac{BC}{PW} = \frac{OB}{OC} \cdot \frac{SQ^2}{SR^2}.$$

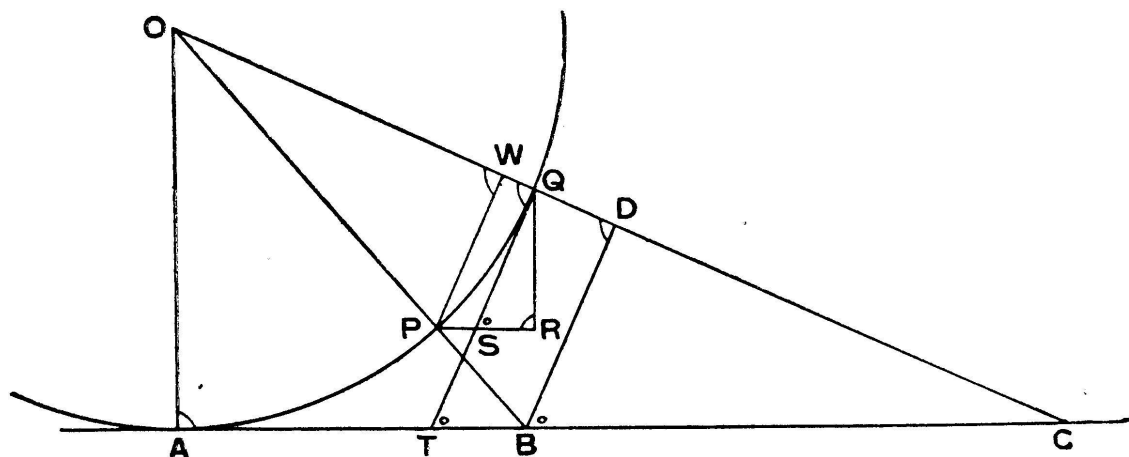


Fig. 1.

Preuve: Les angles marqués dans la fig. 1 sont évidemment égaux. Donc, par la similitude des triangles, nous avons:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{BC}{BD} = \frac{OC}{OA} = \frac{SQ}{SR} \\ \frac{BD}{PW} = \frac{OB}{OP} = \frac{OB}{OA} \end{array} \right\} \therefore \frac{BC}{PW} = \frac{OB \cdot OC}{OA^2} = \frac{OB}{OC} \cdot \frac{SQ^2}{SR^2}.$$

Corollaire. A la limite, l'angle BOC dans la fig. 2 devenant infiniment petit, on a (dans la fig. 1):

$$\frac{PR}{SR} \rightarrow 1, \quad \frac{PW}{PQ} \rightarrow 1, \quad \frac{OB}{OC} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{SQ}{SR} \rightarrow \frac{PQ}{PR};$$

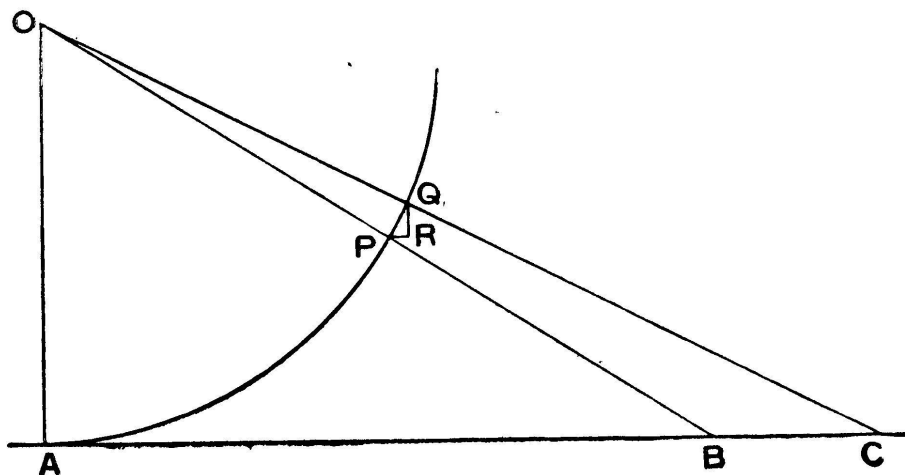


Fig. 2.

ce qui donne finalement:

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{PQ^2}{PR^2}$$

ou

$$\frac{BC}{PR} = \left(\frac{PQ}{PR}\right)^3.$$

Application au rayon de courbure. — Si ρ (dans la fig. 3) représente le rayon de courbure de la courbe LM au point P, et Q un point voisin, on aura alors:

$$PR = \delta x, \quad RQ = \delta y,$$

$$PQ = \left\{ 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \delta x,$$

d'où

$$\left(\frac{PQ}{PR}\right)^3 = \left\{ 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

Dans la fig. 3 nous avons:

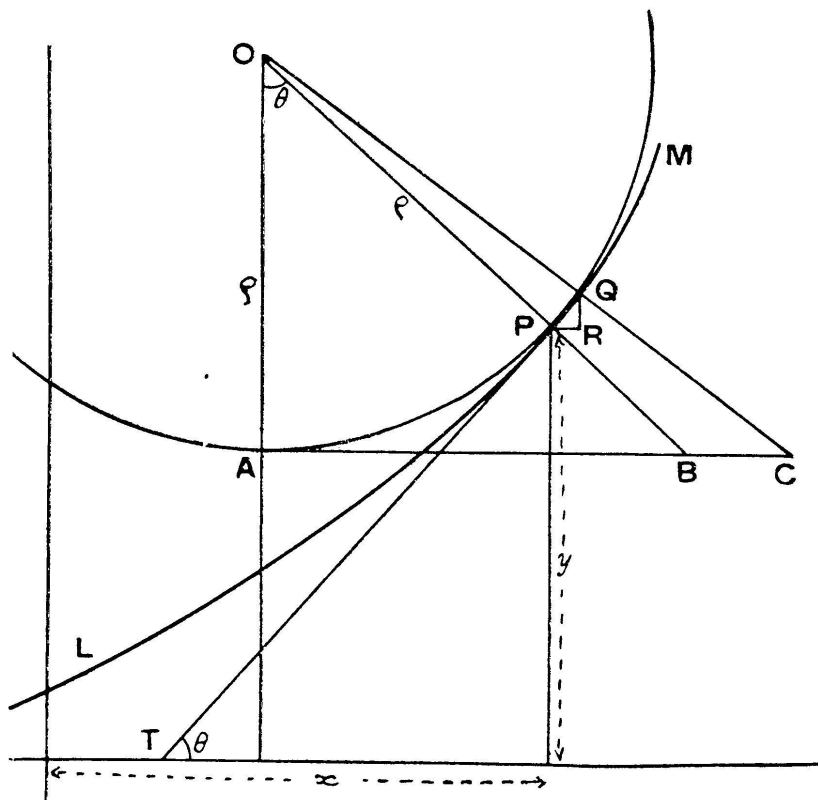


Fig. 3.

$$AB = \rho \operatorname{tg} \theta$$

$$AC = \rho \operatorname{tg} (\theta + \delta\theta)$$

d'où

$$\begin{aligned} BC &= \delta(\rho \operatorname{tg} \theta) \\ &= \rho \cdot \delta \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{BC}{PR} = \rho \cdot \frac{\delta \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right)}{\delta x}$$

Donc, d'après le corollaire ci-dessus $\frac{BC}{PR}$ étant $= \left(\frac{PQ}{PR} \right)^3$, nous aurons, en passant à la limite,

$$\rho \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

II

Dans la fig. 4, PT est la tangente au point P du cercle de centre O', QS la secante qui coupe ce cercle en des points P et Q, QT' la tangente du même cercle au point Q, O'F et O'F' les deux droites passant par les points P et Q du cercle et coupant la tangente AC (\parallel OX) en B et C, QN et PM \perp OX et \parallel OY, PR \perp QN et \parallel OX, DE \parallel QS et D'E' \parallel PT, \angle AO'P = θ et \angle PO'Q = $\Delta\theta$.

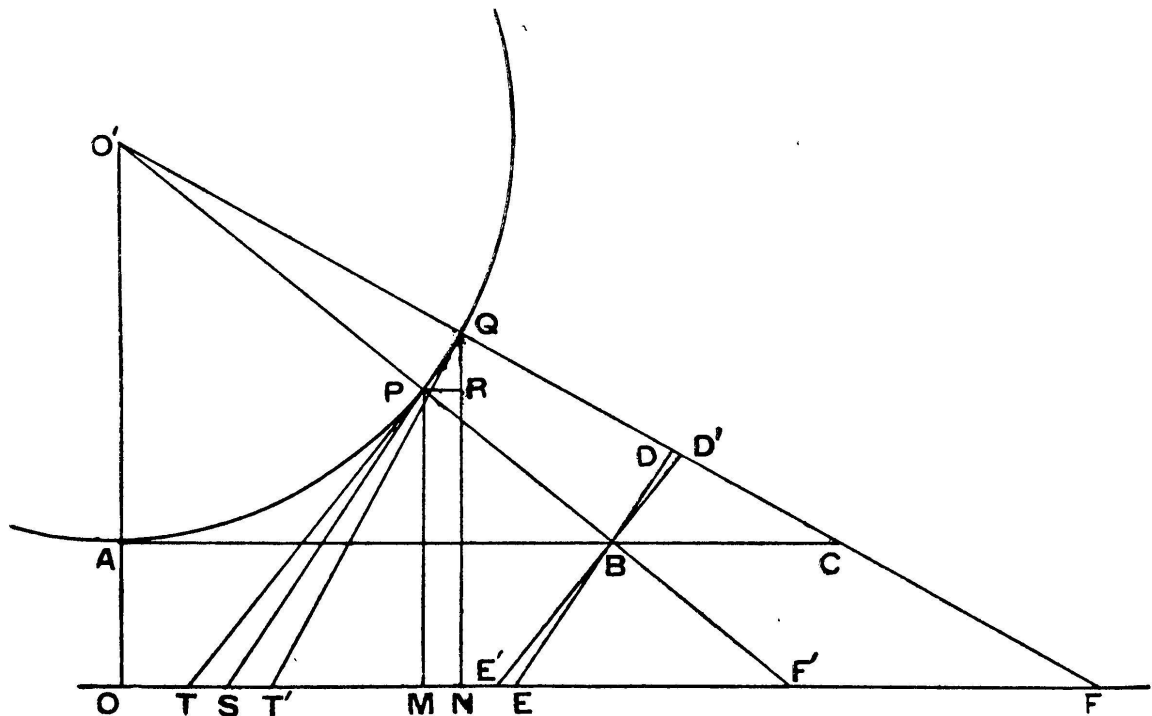


Fig. 4.

De la fig. 4 résulte immédiatement:

$$BC = O'A \cdot \Delta \operatorname{tg} \theta = \rho \Delta \operatorname{tg} \theta .$$

De $\triangle BCD \sim \triangle EFD$ on a:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{EF}{ED} .$$

Mais comme, en passant à la limite, $\triangle EFD$ coïncide avec $\triangle E'F'B$, on aura:

$$\lim \frac{BC}{BD} = \frac{E'F'}{E'B} ,$$

et, $\triangle E'F'B$ étant $\sim \triangle TPM$,

$$\lim \frac{BC}{BD} = \frac{TP}{TM} . \quad (1)$$

D'autre part, BD étant $\parallel PQ$, on a:

$$\frac{BD}{PQ} = \frac{BO'}{PO'} = \frac{BO'}{AO}$$

et, $\triangle BO'A$ étant $\sim \triangle PTM$,

$$\frac{BD}{PQ} = \frac{PT}{MT} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{BC}{BD} \cdot \frac{BD}{PQ} = \frac{PT^2}{MT^2} . \quad (3)$$

De $\triangle PQR \sim \triangle SPM$ on a:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{SP}{SM} .$$

Mais comme, en passant à la limite, $\triangle SPM$ coïncide avec $\triangle TPM$, on aura:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{TP}{TM} . \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) donnent:

$$\lim \frac{BC}{PQ} \cdot \frac{PQ}{PR} = \frac{TP^3}{TM^3} . \quad (5)$$

Comme nous avons d'une part :

$$\lim \frac{BC}{PR} = \frac{\lim \rho \Delta \operatorname{tg} \theta}{\lim \Delta x} = \rho \cdot \frac{d \operatorname{tg} \theta}{dx} = \rho \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

et d'autre part (équation (4)) :

$$\begin{aligned} \frac{TP^3}{TM^3} &= \frac{PQ^3}{PR^3} = \frac{PQ^2}{PR^2} \cdot \frac{PQ}{PR} = \frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} \cdot \sqrt{\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2}} \\ &= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

on aura enfin (équation (5)) :

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \quad (6)$$

CAMILLE JORDAN

(1838-1922)

Ce n'est pas entreprendre une tâche sans péril que d'essayer de rendre un juste hommage à un si grand nom. Nous nous appuierons surtout sur ce qui a déjà été dit par des voix particulièrement autorisées, notamment par celles de MM. Emile Bertin¹, Emile Picard¹, Robert d'Adhémar², Henri Lebesgue³, Henri Villat⁴.

Marie-Ennemond-Camille JORDAN naquit à la Croix-Rousse, près Lyon, le 5 janvier 1838. Il était fils de l'ingénieur Alexandre Jordan et de Joséphine Puvis de Chavannes, sœur du célèbre peintre. Après de premières études au Collège d'Oullins et au Lycée de Lyon, il entra à l'École Polytechnique comme élève en 1855, comme examinateur en 1873, comme professeur en 1876; il conserva ce dernier titre pendant 36 ans ! Il fut aussi

¹ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1922.

² *Revue générale des Sciences*, 15 février 1922.

³ *Revue scientifique*, 22 avril 1922.

⁴ *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1922, fascicule 1.