4. — La méthode de Piltz.

M. Sierpiński[1] applique la méthode de Voronoï au problème du cercle, et il trouve

$$P(x) = O(\sqrt[3]{x}) , \tag{4}$$

donc un résultat bien meilleur que celui de Gauss.

4. — *La méthode de Piltz.*

C'est M. Piltz qui a trouvé la méthode arithmétique (1881). Comme nous l'avons déjà fait remarquer à propos de la méthode de Dirichlet, il suffit dans le problème des diviseurs de s'occuper de la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) ,$$

où pour abréger on a posé $\psi(v) = v - E(v) - \frac{1}{2}$.

Dirichlet se sert de la borne supérieure triviale $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ pour la valeur absolue de cette somme, mais M. Piltz a remarqué que, si x est grand, les termes négatifs atténuent l'influence des termes positifs. Il décompose l'intervalle $(1, \sqrt{x})$ en intervalles partiels, et il montre qu'en choisissant d'une manière appropriée les points de division, la contribution de chaque intervalle partiel à la somme en question est d'un ordre plus petit que la longueur de l'intervalle, d'où l'on déduit que la valeur absolue de la somme considérée est d'un ordre inférieur à $\sqrt{x}$.

L'idée fondamentale de la méthode de Piltz est donc de réunir beaucoup de termes

$$\psi\left(\frac{x}{t}\right) + \psi\left(\frac{x}{t+1}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{x}{t+B-1}\right) ,$$

de telle façon que la valeur absolue de cette somme reste cependant relativement petite. Pour cela on doit pouvoir trouver une borne supérieure de cette valeur absolue, ce qui se fait de la façon suivante:

---

[1] *Prace mat. fiz.*, 17 (1906), p. 77-114.

On choisit le nombre positif A ne contenant aucun des facteurs de B tel que la plus grande valeur g de

$$\left|\frac{Bx}{t+h} - \frac{Bx}{t} - Ah\right| ,$$

où h est un des nombres 0, 1, ..., B — 1, soit la plus petite possible. On a alors

$$\left|\frac{x}{t+h} - \frac{x}{t} - \frac{Ah}{B}\right| \leqq \frac{g}{B} .$$

Si g est petit, $\frac{x}{t+h}$ est à peu près égal à $\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}$, donc la somme en question est à peu près égale à

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right) ;$$

plus exactement on a

$$\left|\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t+h}\right) - \sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right)\right| < 4g + 2 . \qquad (5)$$

Calculons maintenant la somme

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right) ,$$

c'est-à-dire la somme

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{Ah+c}{B}\right) , \qquad \text{où} \quad c = \frac{Bx}{t} .$$

A chaque nombre entier h dans l'intervalle $0 \leqq h \leqq B-1$ correspond un nombre entier k dans le même intervalle et tel que la différence

$$Ah + E(c) - k$$

soit divisible par B, et la réciproque est vraie aussi, A ne contenant aucun des facteurs de B. $\psi(t)$ étant une fonction de période 1, on a

$$\psi\left(\frac{Ah+c}{B}\right) = \psi\left(\frac{k+c-E(c)}{B}\right) = \frac{k+c-E(c)}{B} - \frac{1}{2} .$$

puisque la partie entière de $\frac{k + c - \mathrm{E}(c)}{\mathrm{B}}$ est égale à 0. On a donc

$$\sum_{h=0}^{\mathrm{B}-1} \psi\left(\frac{\mathrm{A}h + c}{\mathrm{B}}\right) = \sum_{k=0}^{\mathrm{B}-1}\left(\frac{k + c - \mathrm{E}(c)}{\mathrm{B}} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{B} - 1}{2} + c - \mathrm{E}(c) - \frac{\mathrm{B}}{2} = c - \mathrm{E}(c) - \frac{1}{2} ,$$

ce qui est en valeur absolue inférieur à 1. Il s'ensuit donc de (5)

$$\left| \sum_{h=0}^{\mathrm{B}-1} \psi\left(\frac{x}{t + h}\right) \right| < 4g + 3 .$$

C'est sur cette inégalité que repose la méthode de Piltz. Pour une valeur donnée de t on peut choisir A et B tels que le membre de droite de cette dernière inégalité est beaucoup plus petit que B, donc aussi beaucoup plus petit que la longueur de l'intervalle.

M. Piltz n'a jamais publié sa méthode. En 1901 il a écrit deux lettres à M. Landau, pour exposer son procédé et pour démontrer le théorème de Voronoï. Les démonstrations données dans ces lettres, ne sont pas exactes, et ce n'est que depuis quelques années que M. Landau [1] a réussi à en déduire l'approximation de Voronoï. Jusqu'à présent on n'a pu trouver aucun résultat meilleur avec cette méthode, quoique M. Piltz prétendît qu'il pouvait diminuer l'erreur, et la ramener à $O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$, quelque soit le nombre positif ε.

5. — *La méthode de Pfeiffer.*

Le sort de la méthode de Piltz ressemble un peu à celui de la troisième méthode que nous allons exposer, celle de Pfeiffer [2]. L'inventeur a, il est vrai, publié sa méthode (1886); mais son travail manquait tellement de clarté et de précision qu'il est resté sans influence sur le développement de la théorie analytique des nombres, jusqu'à ce que M. Landau [3] en 1912 eût trouvé

---

[1] *Gött. Nachr.* (1920), p. 13-32.
[2] *Jahresbericht der Pfeifferschen Lehr- und Erziehungs-Anstalt zu Jena* (1886).
[3] *Wien. Ber.* (IIa), 121 (1912), p. 2195-2332 ; 124 (1915), p. 469-505.