

# SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES

Autor(en): **Lebesgue, Henri**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19745>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES

PAR

Henri LEBESGUE (Paris).

1. — M. J. KARIYA a démontré (*Enseignement mathématique*, t. VI, mars 1904) un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

*Soient  $a, b, c$  les points de contact avec les côtés d'un triangle  $ABC$  de l'un des cercles inscrits dans ce triangle. Soit  $O$  le centre de ce cercle, soit  $a' b' c'$  un triangle homothétique de  $a b c$  par rapport à  $O$ .  $ABC$  et  $a' b' c'$  sont homologues<sup>1</sup>.*

L'énoncé précédent nous apprend qu'étant donnés deux triangles  $T$  et  $t$ ;

a) qui sont homologues;

b) et tels que  $t$  soit inscrit dans  $T$ ,

on peut, et d'une infinité de manières, déterminer un point  $O$  et une droite  $D$  de façon que  $T$  soit homologue de tout triangle  $t'$  qui se déduit de  $t$  par n'importe laquelle des homologies de centre  $O$  et d'axe  $D$  (homologies  $O, D$ ).

Le cas considéré par M. Kariya, qui est celui où la conique  $\mathcal{C}$  inscrite dans  $T$  et circonscrite à  $t$  se réduit à un cercle de centre  $O$ , nous montre, en effet, que l'on peut prendre pour  $O$  n'importe quel point du plan, à condition de prendre pour  $D$  la polaire de  $O$  par rapport à  $\mathcal{C}$ .

On peut donner à l'énoncé précédent une plus grande portée

---

<sup>1</sup> J'ai eu connaissance de cette proposition par un article de M. A. AMIEL paru dans le dernier numéro de *l'Enseignement mathématique* (t. XXIII, n<sup>o</sup> 3-4), dans lequel l'auteur donne un théorème en quelque sorte corrélatif de celui de M. KARIYA.

Pour m'assurer que les remarques qu'on va lire n'avaient pas été soumises déjà aux lecteurs de cette revue, j'en ai feuilleté la collection. Je me suis ainsi aperçu que le théorème de Kariya avait été l'occasion de multiples communications qu'on trouvera, non seulement dans le n<sup>o</sup> de mai 1904 cité par M. Amiel, mais dans les tomes VI et VII tout entiers. En particulier, il a échappé à M. Amiel que son énoncé avait déjà été démontré en 1905 par M. TABAKOFF.

apparente en remarquant que,  $O$  et  $D$  étant pôle et polaire par rapport à  $\mathcal{C}$ , si  $T'$  et  $t''$  se déduisent de  $T$  et  $t$  par des homologies  $(O, D)$ , distinctes ou non,  $T'$  et  $t''$  sont homologues; en effet, effectuons d'abord sur  $T$  et  $t$  celle des homologies  $(O, D)$  qui transforme  $T$  en  $T'$ ;  $t$  devient alors  $t'$ . Appliquons maintenant le théorème précédent à  $T'$  et  $t'$ , en effectuant sur  $t'$  celle des homologies  $(O, D)$  qui le transforme en  $t''$ , nous aurons prouvé l'homologie de  $T'$  et  $t''$ . On pourra, en particulier, inverser le rôle de  $T$  et  $t$  dans l'énoncé précédent et énoncer que  $t$  est homologue de tout transformé de  $T$  par une homologie  $(O, D)$  <sup>1</sup>.

Ainsi le théorème précédent est susceptible d'énoncés divers qui sont conséquences les uns des autres; je m'en tiendrai dans la suite à la forme donnée ci-dessus à ce théorème. Et je vais étudier s'il reste vrai quand on renonce à la condition  $b$ );  $T$  et  $t$  deviennent alors deux triangles homologues qui, en dépit de la forme de l'énoncé, jouent exactement le même rôle <sup>2</sup>. Nous allons voir que l'énoncé subsiste et nous déterminerons tous les couples  $(O, D)$  que nous trouverons liés, dans le cas général, tout à fait de la même manière que dans le cas particulier examiné par M. Kariya <sup>3</sup>.

2. — Considérons deux triangles  $ABC$  ou  $T$ ,  $abc$  ou  $t$ , homologues par rapport à un centre  $\Omega$  et soit  $O$  un point de leur plan; demandons-nous si l'on peut associer à  $O$  une droite  $D$  définissant des homologies satisfaisant à l'énoncé précédent. Soit  $\gamma$  le point de rencontre, inconnu, de  $D$  et de  $ab$ ; une droite quelconque issue de  $\gamma$  rencontre  $Oa$  et  $Ob$  en deux points  $a'$ ,  $b'$  qui sont deux sommets de l'un des triangles,  $a' b' c'$  ou  $t'$ , que nous avons à considérer. Le centre de l'homologie transformant  $T$  en  $t'$  est le point de rencontre  $\omega$  de  $Aa'$  et  $Bb'$ . Lorsque  $\gamma$  est connu le lieu de  $\omega$  est, d'après cela, une conique  $(\gamma)$  passant par  $A, B, O, \Omega$ . Pour qu'une droite  $D$  réponde à la

<sup>1</sup> Pour le cas où  $\mathcal{C}$  est un cercle de centre  $O$ , cette dernière forme de la proposition est celle de MM. TABAKOFF et AMIEL. Un énoncé de M. FRANKE, et sa réciproque formulée par M. Tabakoff, se relie de la même manière à l'énoncé de M. KARIYA.

<sup>2</sup> Il est clair qu'on ne saurait renoncer à la condition  $a$ ).

<sup>3</sup> Pour éviter tout malentendu, je fais observer que nous n'avons pas à rechercher dans quel cas des homologies forment un groupe. Nous avons bien à considérer l'opération résultant de l'homologie qui transforme  $T$  en  $t$ , suivie de celle qui transforme  $t$  en  $t'$ ; mais nous appliquons ces opérations seulement aux trois sommets de  $T$ .

question, il faut et il suffit que de ses points de rencontre  $\gamma, \alpha, \beta$  avec  $ab, bc, ca$  on déduise trois coniques  $(\gamma), (\alpha), (\beta)$  qui soient confondues. Il est nécessaire et suffisant pour cela que  $(\gamma)$  passe par C,  $(\alpha)$  par A,  $(\beta)$  par B; car alors  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$  sont toutes trois déterminées par les 5 mêmes points A, B, C, O,  $\Omega$ .

Voyons donc quel doit être  $\gamma$  pour que  $(\gamma)$  passe par C. Si  $\omega$  vient en C,  $Aa'$  et  $Bb'$  sont devenues AC et BC donc  $a'$  et  $b'$  sont respectivement aux points de rencontre  $a'_1, b'_1$  de Da et de AC, de Ob et de BC. La droite  $a'_1, b'_1$ , est connue, elle coupe  $ab$  au point  $\gamma$  qui est ainsi déterminé.  $\alpha$  est de même déterminé par la rencontre d'une droite  $b'_2c'_2$  et de  $bc, \beta$  par la rencontre de  $c'_3a'_3$  et de  $ac$ .

Ainsi, si les points  $\alpha, \beta, \gamma$  sont en ligne droite, au point O est associé une droite D et une seule: la droite  $\alpha\beta\gamma$ . Or on va vérifier que  $\alpha, \beta, \gamma$  sont toujours en ligne droite. Je ferai cette vérification par le calcul ce qui me donnera de suite la correspondance O, D.

Soient les équations

$$x = 0 \text{ pour } bc, \quad y = 0 \text{ pour } ca, \quad z = 0 \text{ pour } ab;$$

et

$$ux + vy + wz = 0$$

pour l'axe d'homologie de T et t. Les côtés de T ont pour équation

$$(u + u_1)x + vy + wz = 0, \quad BC,$$

$$ux + (v + v_1)y + wz = 0, \quad CA,$$

$$ux + vy + (w + w_1)z = 0, \quad AB,$$

Soient  $x_0, y_0, z_0$ , les coordonnées de O; celles de  $a'_1$  vérifieront l'équation de CA et la relation

$$\frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0};$$

donc ce sont

$$(v + v_1)y_0 + wz_0, \quad -uy_0, \quad -uz_0.$$

L'équation de  $a'_1, b'_1$ , est donc:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ (v + v_1)y_0 + wz_0 & -uy_0 & -uz_0 \\ -vx_0 & (u + u_1)x_0 + wz_0 & -vz_0 \end{vmatrix} = 0,$$

et comme le  $z$  de  $\gamma$  est nul, on a pour les coordonnées de  $\gamma$

$$u[(u + u_1)x_0 + vy_0 + wz_0], \quad -v[ux_0 + (\nu + \nu_1)y_0 + wz_0], \quad 0$$

de même pour  $\beta$  et  $\alpha$  on a :

$$\begin{aligned} & -w[ux_0 + vy_0 + (\omega + \omega_1)z_0], \quad 0 \quad v[ux_0 + (\nu + \nu_1)y_0 + wz_0]; \\ 0, \quad w[ux_0 + vy_0 + (\omega + \omega_1)z_0], \quad -u[(u + u_1)x_0 + vy_0 + wz_0]. \end{aligned}$$

Le déterminant de ces coordonnées est d'ordre 3, il est symétrique gauche, donc il est nul.  $\alpha, \beta, \gamma$  sont en ligne droite; à tout point O est associée une droite D dont l'équation a pour coefficients de  $x, y, z$ , les mineurs de la matrice formée par les coordonnées de  $\beta$  et  $\alpha$ . Donc l'équation de D est :

$$\begin{aligned} 0 = u[(u + u_1)x_0 + vy_0 + wz_0]x + v[ux_0 + (\nu + \nu_1)y_0 + wz_0]y \\ + w[ux_0 + vy_0 + (\omega + \omega_1)z_0]z. \end{aligned}$$

D passe par O, quand O est point de la conique  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} u[(u + u_1)x + vy + wz]x + v[ux + (\nu + \nu_1)y + wz]y \\ + w[ux + vy + (\omega + \omega_1)z]z = 0. \end{aligned}$$

Or il est clair que l'équation de D s'écrit :

$$x \times \frac{1}{2} \mathcal{C}'_{x_0} + y \times \frac{1}{2} \mathcal{C}'_{y_0} + z \times \frac{1}{2} \mathcal{C}'_{z_0} = 0.$$

Donc O et D sont pôle et polaire par rapport à  $\mathcal{C}$ .

Et la valeur trouvée pour  $\frac{1}{2} \mathcal{C}'_x$  montre que la droite  $\frac{1}{2} \mathcal{C}'_x = 0$ , c'est-à-dire la polaire de  $a$ , est la droite BC. Ainsi la conique  $\mathcal{C}$  est celle par rapport à laquelle T et t sont polaires réciproques.

3. — Cet énoncé généralise bien celui que nous avons déduit du théorème de M. Kariya; au reste il n'était pas difficile à prévoir si l'on songeait qu'une transformation par polaire réciproque par rapport à  $\mathcal{C}$  inversait T et t et transformait une homologie (O, D) répondant à la question en une homologie  $y$  répondant également et qui avait pour centre le pôle de D et pour axe la polaire de O. Guidé par cette prévision du résultat à démontrer on peut remplacer l'analyse précédente par le raisonnement synthétique suivant.

Nous voulons prouver que si  $O$  et  $D$  sont pôle et polaire par rapport à la conique  $\mathcal{C}$  par rapport à laquelle deux triangles homologues  $T$  et  $t$  sont polaires réciproques, le couple  $(O, D)$  définit des homologies qui transforment  $t$  en triangles homologues avec  $T$ <sup>1</sup>.

Raisonnons sur une représentation du plan projectif dans laquelle  $\mathcal{C}$  est une circonférence de centre  $O$ . Alors  $Oa$  est perpendiculaire à  $BC$  et le coupe en un point  $A_1$ ; de même  $Ob$  et  $Oc$  sont respectivement perpendiculaires à  $CA$ ,  $AB$  et les coupent en  $B_1$  et  $C_1$ . On a :

$$Oa \times OA_1 = Ob \times OB_1 = Oc \times OC_1 .$$

Si maintenant on remplace  $T$  et  $t$  par des homothétiques  $T'$  et  $t''$  par rapport à  $O$ , les relations de perpendicularité restent les mêmes et l'on a :

$$Oa'' \cdot OA'_1 = Ob'' \cdot OB'_1 = Oc'' \cdot OC'_1 .$$

Donc  $a'' b'' c''$  ou  $t''$  et  $A' B' C'$  ou  $T'$  sont polaires réciproques par rapport à un cercle de centre  $O$ , donc sont homologues.

Ce mode de raisonnement, qui s'applique de suite à l'énoncé de M. Kariya, comme aussi à ceux de MM. Franke, Tabakoff et Amiel auxquels j'ai fait allusion, est, sinon le plus élémentaire de ceux qui ont été proposés, du moins le plus immédiat et le plus clair.

Il exige que l'on sache démontrer l'homologie de deux triangles  $abc$ ,  $ABC$  polaires réciproques par rapport à une circonférence de centre  $O$ . Soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les points de rencontre de  $bc$  et  $BC$ , de  $ca$  et  $CA$ , de  $ab$  et  $AB$ . Soit  $\omega$  le point de rencontre de  $bc$  et de  $aA$ . Le rapport anharmonique des quatre droites concourrantes  $A\alpha$ ,  $AB$ ,  $AC$ ,  $Aa$ , est celui de leurs pôles

$$\omega, c, b, \alpha,$$

donc celui de

$$\alpha, b, c, \omega,$$

donc celui de

$$a\alpha, ab, ac, a\omega.$$

<sup>1</sup> Je laisse maintenant de côté la question, précédemment traitée, de savoir si ces couples  $(O, D)$  sont les seuls répondant à la question.

Et puisque  $Aa$  et  $a\omega$  coïncident, les points  $\alpha, \beta, \gamma$ , déterminés par la rencontre de  $A\alpha$  avec  $a\alpha$ , de  $AC$  avec  $ac$ , de  $AB$  avec  $ab$ , sont en ligne droite.

4. — Des raisonnements du paragraphe 2 on déduira de suite que si trois homologues  $(O, D)$  transforment un triangle  $t$  en triangles homologues avec un triangle donné  $T$ ,  $t$  et  $T$  sont homologues et  $(O, D)$  est l'un des couples que nous avons appris à leur associer.

Cette proposition, comme les précédentes, est relative à des figures formées de triangles dont deux quelconques sont homologues. Peut-être pourrait-on déterminer toutes les figures jouissant de cette propriété.

---

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE  
DES DÉRIVÉES SUPÉRIEURES  
DES FONCTIONS CIRCULAIRES  $\sin x$  ET  $\cos x$

PAR

J. ARNOVLJEVIC (Belgrade) et B. PETRONIEVIC (Belgrade).

---

Ayant réussi à déduire géométriquement les dérivées premières des fonctions circulaires <sup>1</sup>, je me suis efforcé d'appliquer le même procédé aux dérivées supérieures de ces fonctions. Mon collègue, M. D<sup>r</sup> Ivan Arnovljevic, professeur de Mécanique à la Faculté technique de l'Université de Belgrade, ayant trouvé avant moi une solution géométrique du problème pour la deuxième dérivée des fonctions  $\sin x$  et  $\cos x$ , j'ai utilisé les éléments de sa solution pour arriver à la déduction géométrique de la troisième et des dérivées supérieures de ces deux fonctions.

---

<sup>1</sup> Comp. B. PETRONIEVIC, Déduction des dérivées de fonctions circulaires par la méthode géométrique des limites. — *L'Enseignement mathématique*, XXII<sup>e</sup> année, N<sup>o</sup> 3-4, p. 195-208.