

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1923)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** Réunion de Lugano, avril 1924.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications

*Réunion de Lugano, avril 1924.*

Les mathématiciens suisses ont tenu leur réunion de printemps 1924 à Lugano, le mardi de Pâques, 22 avril 1924, sous la présidence de M. le prof. SPEISER, de l'Université de Zurich. Ils ont choisi cette occasion pour établir des rapports plus étroits avec leurs éminents collègues mathématiciens italiens, et principalement avec l'Union mathématique italienne, représentée officiellement à la réunion par son secrétaire, M. BORTOLOTTI, professeur à l'Université de Bologne.

L'ordre du jour comprenait deux conférences: une première conférence de M. le prof. F. ENRIQUES, de l'Université de Rome, *Sur la théorie des équations et des fonctions algébriques, d'après l'école géométrique italienne*<sup>1</sup>, une seconde de M. Michel PLANCHEREL, professeur à l'École polytechnique fédérale, intitulée: *Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans les vingt dernières années*<sup>2</sup>. Suivaient quatre communications plus courtes de MM. L. KOLLROS, R. FUETER, L.-G. DU PASQUIER, A. SPEISER, dont voici les résumés:

1. — Prof. L. KOLLROS (Zurich). — *Sur une configuration de dix droites.* — Morley a démontré le théorème suivant: Soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  trois droites quelconques dans l'espace;  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , les perpendiculaires communes à ces droites prises deux à deux;  $\alpha'$  la perpendiculaire commune à  $\alpha$  et  $a$ ;  $\beta'$  et  $\gamma'$  les droites analogues. Les trois droites  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  rencontrent à angle droit une même droite  $\delta$ .

M. Bricard en a donné une démonstration basée sur des propriétés du déplacement fini d'un solide (*Nouv. Ann. de Math.*, nov. 1923); en voici une autre, directe et très simple:

Désignons les points à l'infini des droites par les mêmes lettres suivies d'un point. Les deux triangles  $\alpha.\beta.\gamma$ . et  $a.b.c$ . sont homologues, puisque les côtés de l'un sont les polaires des sommets de l'autre par rapport à l'ombilicale. Les points  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  sont sur l'axe

<sup>1</sup> On trouvera cette conférence dans le présent fascicule, p. 309.

<sup>2</sup> Elle sera publiée dans un prochain numéro.

d'homologie; les trois droites  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  sont donc parallèles à un même plan, perpendiculaire à la direction du centre d'homologie  $\delta$ .

Il reste à prouver que les trois plans  $\delta.\alpha'$ ,  $\delta.\beta'$  et  $\delta.\gamma'$  passent par une même droite. Prenons dans le plan à l'infini ( $x_4 = 0$ )  $\alpha.(1000)$ ,  $\beta.(0100)$ ,  $\gamma.(0010)$  pour triangle de référence et  $\delta.(1110)$  comme point-unité d'un système de coordonnées projectives; les six autres points à l'infini auront alors les coordonnées:  $a.(k110)$ ,  $b.(1l10)$ ,  $c.(11m0)$  et  $\alpha'.(0, 1-l, m-1, 0)$ ,  $\beta'.(k-1, 0, 1-m, 0)$ ,  $\gamma'.(1-k, l-1, 0, 0)$ .

Si les plans  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 0$  sont respectivement  $\beta.\gamma$ ,  $\gamma.\alpha$  et  $\alpha.\beta$ , on pourra désigner les coordonnées du point  $(\beta c)$  par  $a_1 a_2 0 1$ ; celles de  $(\gamma a)$  par  $(0 b_2 b_3 1)$  et celles de  $(\alpha b)$  par  $(c_1 0 c_3 1)$ .

$\alpha'$  est alors l'intersection des deux plans:

$$\alpha\alpha' \equiv \alpha.(\alpha b)\alpha' \equiv (m-1)x_2 + (l-1)x_3 + c_3(1-l)x_4 = 0.$$

et

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' \equiv a.(\gamma a)\alpha' \equiv & (2-l-m)x_1 + k(m-1)x_2 + k(l-1)x_3 \\ & + k[b_3(1-l) + b_2(1-m)]x_4 = 0. \end{aligned}$$

En ajoutant la seconde équation à la première multipliée par  $(1-k)$ , on a l'équation du plan  $\delta.\alpha'$ :

$$\begin{aligned} & (2-l-m)x_1 + (m-1)x_2 + (l-1)x_3 + \\ & [c_3(1-l)(1-k) + kb_3(1-l) + kb_2(1-m)]x_4 = 0. \end{aligned}$$

Par permutations cycliques, on trouve les équations de  $\delta.\beta'$  et  $\delta.\gamma'$  et l'on voit immédiatement que  $\delta.\alpha' + \delta.\beta' + \delta.\gamma' \equiv 0$ , si l'on tient compte, dans le coefficient de  $x_4$ , de la relation  $c_3 = -a_2m$ , indiquant que les trois points  $(\alpha c)$ ,  $(\beta c)$  et  $c$  sont alignés, et des deux analogues:  $a_1 = -b_3k$  et  $b_2 = -c_1l$ . Les trois plans  $\delta.\alpha'$ ,  $\delta.\beta'$  et  $\delta.\gamma'$  passent donc par une droite  $\delta$ .

2. — Prof. Rud. FUETER (Zurich). — *Sur les sous-groupes du groupe modulaire.* — Soient  $S^{(n)}$  une substitution du groupe congruent d'ordre  $n$ , et

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{où } ad - bc = n,$$

une substitution d'ordre  $n$ , les nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  n'ayant pas de facteur commun. Lorsque  $S^{(n)}$  passe par toutes les substitutions du groupe congruent d'ordre  $n$ ,  $T$  restant fixe, toutes les substitutions  $T^{-1}S^{(n)}T$  forment un sous-groupe du groupe modulaire et que l'on appelle groupe de transformation. Elles sont en nombre fini, à savoir:

$$\Psi(n) = n \Pi \left( 1 + \frac{1}{p} \right).$$

Elles sont conjuguées entre elles par rapport au groupe modulaire et possèdent en outre l'index fini

$$\mu(n) = \frac{n^3}{2} \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad (n > 2).$$

Pour plus de développement, consulter mon récent ouvrage: *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen* (Teubner, 1924), p. 33 et suiv.

3. — Prof. L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Sur l'évolution du concept de nombre complexe entier.* — Pour construire une arithmomie, le premier pas, indispensable, consiste à définir le complexe « entier », car l'objet essentiel de toute théorie des nombres est l'étude des relations entre « nombres entiers ». Le point de départ des généralisations du concept de nombre entier ordinaire se trouve dans les *Recherches arithmétiques* de GAUSS, où un nombre complexe ordinaire  $a + bi$  est dit « entier » si ses deux coordonnées,  $a$  et  $b$ , sont toutes deux des nombres entiers ordinaires. — Dans le deuxième stade, on étendit ces raisonnements aux nombres hypercomplexes

$$x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (1)$$

sur lesquels on supposait définies l'égalité et quatre opérations rationnelles. Les  $x_\lambda$ , nombres réels quelconques, sont les *coordonnées* du complexe  $x$  et les  $e_\lambda$  des symboles dits *unités relatives* du système. Un tel nombre hypercomplexe est dit « entier », si ses  $n$  coordonnées  $x_\lambda$  sont toutes des nombres entiers ordinaires. Cette définition lipschitzienne, qui a l'avantage d'être univoque et toujours applicable, a servi de base aux premières arithnomies généralisées.

*Troisième stade.* R. LIPSCHITZ découvre que l'on arrive parfois à des arithnomies irrégulières, si l'on prend comme base la définition ci-dessus. A. HURWITZ découvre que l'on peut faire disparaître les anomalies, si l'on pose une nouvelle définition du nombre hypercomplexe entier, basée sur les propriétés B, C, M et U définies comme suit.

1) *La propriété C* (clos): Les complexes entiers doivent former un domaine d'intégrité [J], c'est-à-dire qu'ils doivent se reproduire par addition, soustraction et multiplication.

2) *La propriété B* (base): Ce domaine [J] doit avoir une base finie, c'est-à-dire doit contenir des éléments  $t_\lambda$  en nombre fini tels que l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_r t_r \quad (2)$$

reproduise chaque élément du domaine [J], et seulement ceux-là, quand les  $m_\lambda$  parcourent, indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

3) *La propriété U* (unités): Ce domaine  $[J]$  doit contenir toutes les unités relatives  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_n$ . La propriété  $U$ , contrairement aux deux précédentes, n'est pas invariante en regard de toute transformation linéaire des unités relatives.

4) *La propriété M* (maximalité): Ce domaine  $[J]$  doit être « maximal ». Désignons par  $[M]$  tout ensemble jouissant de ces quatre propriétés  $B, C, U$  et  $M$ .

La définition hurwitzienne, basée sur ces quatre propriétés, est alors la suivante: Sont dits « entiers » les nombres hypercomplexes contenus dans  $[M]$ ; les autres sont réputés « non entiers ». Ce n'est donc plus, comme dans le deuxième stade, la nature des coordonnées qui décide si un complexe donné est « entier » ou non.

*Quatrième stade.* Je remplace la propriété  $U$  par

5) *La propriété  $U_1$* : Le domaine  $[J]$  doit contenir le nombre 1; il n'est pas nécessaire qu'il contienne toutes les unités relatives  $e_\lambda$ . Définition du domaine holoïde. Sur la propriété  $U$ , la propriété  $U_1$  a le grand avantage d'être 1° beaucoup moins limitative; 2° invariante en regard de toute transformation linéaire opérée sur les unités relatives.

Ma première définition du nombre hypercomplexe entier, à l'aide des propriétés  $B, C, M, U_1$ , est basée sur des propriétés invariantes. Découverte que cette définition n'est pas toujours univoque. L'idée de relativité s'introduit dans l'arithmomie.

*Cinquième stade.* Je découvre que le plus souvent les propriétés  $B, C, U_1$  ensemble excluent la propriété  $M$ . Les deux possibilités résultant de ce fait. Conséquences de l'abandon de la propriété  $C$ . Nouvelle définition de la propriété  $M$ . Définition subsidiaire du nombre hypercomplexe « entier » à l'aide des notions de « coordonnées-tête » et « coordonnées-terminaison ».

*Sixième stade.* Les propriétés  $C, M$  et  $U_1$  ne suffisant pas pour caractériser les nombres « entiers » (comme le montre déjà l'ensemble des nombres rationnels ordinaires), on introduit:

6) *La propriété N* (norme): Tous les nombres hypercomplexes du domaine envisagé ont une norme qui est un nombre entier ordinaire. C'est une propriété invariante. Ma seconde définition du nombre hypercomplexe « entier » est basée sur les propriétés  $C, U_1, M$  et  $N$ . M<sup>r</sup> L.-E. DICKSON introduit:

7) *La propriété R* (rang): Pour tout nombre hypercomplexe appartenant à l'ensemble considéré, les coefficients de son équation au rang sont tous des nombres entiers ordinaires. Cette propriété  $R$ , plus restrictive que la propriété  $N$ , qu'elle entraîne, est également invariante.

Définition du nombre hypercomplexe « entier » par M<sup>r</sup> L.-E. DICKSON; elle est basée sur les propriétés  $C, U_1, M$  et  $R$ . La notion des arithmomies associées. L'existence de deux catégories de systèmes de nombres hypercomplexes, 1° ceux où les sept propriétés ci-dessus définies sont compatibles; 2° ceux où elles ne le sont pas.

4. — Prof. A. SPEISER (Zurich). — *Sur une transformation de contact concernant le problème restreint de la mécanique céleste.* — Un des problèmes les plus importants de cette partie de la mécanique est celui où il y a un centre de forces et où les trajectoires sont limitées à une région finie, la frontière comprenant les points où la vitesse est nulle. Il y a dans cette région deux sortes de points singuliers, dans lesquels les trajectoires présentent des points de rebroussement: 1<sup>o</sup> le centre de forces, par lequel il passe une infinité de trajectoires; 2<sup>o</sup> la frontière qui admet pour chaque point une seule trajectoire.

Il s'agit maintenant d'éloigner ces singularités. On démontre que le problème énoncé est parfaitement identique à un problème sur la sphère sans singularité quelconque et que le passage est fait par une transformation de contact, de sorte que réciproquement à chaque ensemble de courbes à deux paramètres sur la sphère et sans aucune singularité, correspond un ensemble dans la région du plan présentant les singularités indiquées. De cette manière, il est possible de transposer les théorèmes bien connus sur les courbes d'une sphère immédiatement à ce problème de mécanique.

D'autre part, il est impossible de relier les deux problèmes par une transformation de points en laissant intact le caractère d'Analysis situs de la question.

---

## MELANGES ET CORRESPONDANCE

---

### Sur les bitangentes d'une quartique.

*Réponse à une question de M. Marcel WINANTS.*

Dans son article *Fonctions elliptiques et quartiques binodales de l'Enseignement Mathématique* (tome XXIII, nos 3-4, p. 148-163), M. WINANTS a demandé l'explication du fait qu'une équation formée pour donner les bitangentes d'une quartique se trouvait être du 10<sup>e</sup> degré, alors que les formules de Plücker indiquent 8 bitangentes. Nous sommes heureux de lui fournir ici la solution de cette difficulté.

Il nous a en effet paru évident que l'équation (25), formée à partir de l'équation (24) avec une élévation au carré de  $p'\varphi$ , devait admettre une racine double en  $p\varphi$ , non seulement pour une racine double  $\varphi_1 = \varphi_2$ , mais aussi pour deux racines opposées  $\varphi_1 = -\varphi_2$ ; la symétrie de la quartique étudiée montrait qu'alors  $p'u = 0$ , de sorte que  $pu$  est