Chapitre Premier Géométrie projective du domaine binaire

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

l'extension que lui avait donnée Grassmann dans un essai fort discuté et peu compris, et y adjoignons ce *produit complexe* également signalé par l'auteur de l'« Ausdehnungslehre », sans qu'il en ait fait d'applications. Ces deux produits étant déduits et rapprochés naturellement du *produit algébrique* comme du *produit combinatoire* ou *extérieur*, l'algèbre de la géométrie métrique est bien contenue dans celle de la géométrie projective. Nous pensons établir, en outre — et malgré que la brièveté de cet exposé le rende incomplet — qu'il est désormais possible de décrire et de noter simplement les constructions de la géométrie élémentaire, y compris celles de cette géométrie du plan complexe qui s'apparente si étroitement à la théorie des fonctions et de former, en somme, pour chaque configuration, l'identité algébrique qui la traduit.

Dans toute étude de ce genre se pose encore la question de notations : quoique nous efforçant à des notations complètes et uniformes, nous ne croyons guère possible de ne pas user d'abréviations et d'enlever au lecteur le bénéfice de toute attention; le contexte suffira sans doute à lever toute incertitude. En outre, quand aucune confusion ne sera à craindre, nous supprimerons souvent les symboles opératoires.

Chapitre Premier.

Géométrie projective du domaine binaire.

Entre deux éléments a et b d'un tel domaine, Grassmann a défini les produits suivants :

algébrique	$ab = ba$
extérieur	$[ab] = -[ba]$

que nous écrirons encore : $\overline{ab} = -\overline{ba}$ et aussi : $a.b = -b.a$. Tandis que le produit extérieur de deux éléments dépend de $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ unité, c'est-à-dire est scalaire, le produit algébrique dépend de $\frac{2(2+1)}{2} = 3$ unités. Un tel produit, ou forme géométrique quadratique, appartient donc à un nouveau système linéaire, dans lequel on peut définir de nouveaux produits. Nous nous intéresserons à quelques-uns d'entre eux en indiquant leur construction à partir des éléments initiaux du domaine binaire.

On peut, en particulier, prendre comme unités du 2me ordre trois carrés algébriques, soit a^2, b^2, c^2, et se contenter de définir les opérations sur de tels carrés. Entre les éléments du 2me ordre nous envisagerons les produits :

$$\textit{polaire}^{1} \qquad a^2 \,)(\, b^2 = b^2 \,)(\, a^2 = [ab]^2$$

$$\textit{jacobien} \qquad a^2 \,.\, b^2 = -\, b^2 \,.\, a^2 = [ab]\, ab$$

qui, étendus à des formes plus générales :

$$f^{(2)} = \Sigma\, a^2 \qquad g^{(2)} = \Sigma\, b^2$$

s'écrivent symboliquement :

$$f^{(2)} \,)(\, g^{(2)} = g^{(2)} \,)(\, f^{(2)} = [fg]^2$$

$$f^{(2)} \,.\, g^{(2)} = -\, g^{(2)} \,.\, f^{(2)} = [fg] fg \,.$$

Le premier nous ramène aux scalaires; le nom que nous lui donnons se justifie par le fait que quand l'invariant $[fg]^2$ est nul, les deux formes $f^{(2)}$ et $g^{(2)}$ sont dites apolaires.

Le second n'est qu'une fonction linéaire d'un produit extérieur dans le système des éléments du 2me ordre. Comme $[fg]$ symbolise un scalaire, on voit que ce produit est de nouveau une forme quadratique, à savoir la jacobienne des formes $f^{(2)}$ et $g^{(2)}$.

Si nous ajoutons que toute forme quadratique peut se ramener à un produit algébrique de deux éléments, distincts ou confondus, ses deux points-racines, on voit que l'équation caractérisant ces racines n'est autre que :

$$ab \,)(\, x^2 = [ax][bx] = 0 \,.$$

---

[1] Les nécessités d'impression ont substitué au symbole choisi pour le produit polaire : deux parenthèses entrecroisées — souvent employées dans un sens analogue dans la théorie des formes — celui du texte, où les parenthèses sont juxtaposées. *(Note de l'auteur.)*

Enfin, notons que trois carrés algébriques donnent lieu au produit :

jacobien $$(a^2 . b^2)(c^2 = [ab][ac][bc] = - [ab][bc][ca]$$

que nous écrirons encore :

$$[a^2 . b^2 . c^2] \quad \text{ou} \quad a^2 . b^2 . c^2$$

qui n'est autre qu'un produit extérieur entre éléments du 2^{me} ordre, et est de nouveau un scalaire. Il s'ensuit immédiatement la définition du produit plus général :

$$[f^{(2)} . g^{(2)} . h^{(2)}] = \Sigma [a^2 . b^2 . c^2] .$$

Rappelons encore que la 1^{re} polaire d'un élément du 1^{er} ordre m par rapport à une forme quadratique est obtenue par :

$$f^{(2)})(m = f^{(2)} \cdot m = \Sigma [am] a$$

et a par suite, pour équation :

$$f^{(2)})(mx = [(f^{(2)} . m) x] = \Sigma [am][ax] = 0 .$$

Les opérations que nous venons d'énoncer sont familières à tous ceux qui connaissent la théorie des formes algébriques, quel que soit le procédé par lequel on les expose [1]. Notre but n'est pas de reprendre toute cette théorie en nous contentant de changer quelques notations; nous devons cependant pour plus de clarté, envisager rapidement le système des produits et formes algébriques d'ordre n.

On obtient une telle forme comme produit algébrique de n éléments du 1^{er} ordre, ou points, ou comme somme de tels produits; une forme d'ordre n peut aussi se ramener à la somme de $n+1$ puissances algébriques n^{mes}, linéairement indépendantes, et qu'on peut choisir comme unités du système linéaire. Nous poserons encore :

$$f^{(n)} = \Sigma a^n$$

pour la forme d'équation :

$$f^{(n)})(x^n = \Sigma [ax]^n = 0$$

[1] Cf. par exemple J. H. GRACE and A. YOUNG. *The Algebra of Invariants.*

et définirons le produit :

jacobien généralisé $\quad f^{(n)} . g^{(n)} . h^{(n)} \ldots = \Sigma a^n . b^n . c^n \ldots$

avec :

$$a^n . b^n = [ab] a^{n-1} b^{n-1} = \Sigma [ab] a'^{2n-2}$$

$$a^n . b^n . c^n = \Sigma [ab] [a'c]^2 a'^{2n-4} c^{n-2} \;, \quad \text{etc.}$$

produits qui représentent successivement des formes d'ordres :

$$2(n-1) \qquad 3(n-2) \ldots \quad \text{etc.}$$

de sorte que le produit jacobien de $n+1$ formes d'ordre n est une forme d'ordre $(n+1)(n-n) = 0$, c'est-à-dire est scalaire.

A partir d'une forme d'ordre n, $f^{(n)}$, et d'un point m on définit les différentes polaires du point, à savoir

1^{re} polaire $\quad f^{(n)})(m = f^{(n)} . m = \Sigma [am] a^{n-1}$

p^{me} polaire $\quad f^{(n)})(m^p = f^{(n)} \overset{p}{.} m^p = \Sigma [am]^p a^{n-p} \qquad p < n$

c'est-à-dire la forme d'ordre $n-p$ qui a pour équation

$$f^{(n)})(m^p x^{n-p} = \Sigma [am]^p [ax]^{n-p} = 0$$

invariant polaire $\quad f^{(n)})(m^n = f^{(n)} \overset{n}{.} m^n = \Sigma [am]^n$

Sur ce type est basée l'opération plus générale de *transvection* entre deux formes d'ordres n et n', $f^{(n)}$ et $g^{(n')}$, dont le p^{me} transvectant a pour expression

$$h^{(n+n'-2p)} = f^{(n)} \overset{p}{.} g^{(n')} = \Sigma [ab]^p a^{n-p} b^{n'-p}$$

et pour équation :

$$h^{(n+n'-2p)})(x^{n+n'-2p} = \Sigma [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n'-p} = 0 \,.$$

Nous n'envisagerons pas ici les autres opérations invariantes possibles; on peut du reste les construire toutes comme les précédentes au moyen de produits entre les formes lacunaires de Grassmann. Dans celles que nous avons considérées, avec quelque apparence de diversité dans les symboles, notons que nous avons employé le signe $\overset{p}{.}$ entre deux produits algébriques pour exprimer que p éléments du 1^{er} ordre du premier produit formaient avec

p éléments analogues du second une combinaison scalaire sur le modèle du produit polaire, tandis que nous avons réservé le symbole)(de ce produit pour le cas où tous les éléments d'une des formes au moins entraient dans un tel produit.

En dehors des méthodes de Grassmann, Hamilton, ou de leurs disciples, la théorie des formes n'a guère considéré les opérateurs linéaires : homographies ou réciprocités, symboles de transformations quadratiques, etc. Il ne nous semble pas nécessaire de les traiter dans cette introduction.

Chapitre II.

Géométrie métrique des vecteurs du plan : produits de deux vecteurs.

Ce sont les points de la droite de l'infini du plan qu'on représente par les vecteurs. Les opérations de la géométrie métrique peuvent se définir à partir des seuls vecteurs réels, mais il est plus direct d'introduire dès le début des éléments imaginaires, à savoir les vecteurs isotropes (points cycliques) du plan.

Tandis que nous représenterons par u et v deux vecteurs égaux (que nous dirons unitaires) et rectangulaires, les vecteurs isotropes seront désignés par :

$$j_1 = u + \iota v \qquad j_2 = u - \iota v \qquad (\iota = \sqrt{-1})$$

Le *produit intérieur* de deux vecteurs a, b est dès lors défini par le produit polaire suivant [1] :

$$a \times b = ab \,)(\, j_1 j_2 = \frac{[aj_1][bj_2] + [aj_2][bj_1]}{2} \tag{1}$$

Comme :

$$j_1 j_2 = u^2 + v^2$$

il peut aussi s'écrire, comme l'on sait :

$$a \times b = ab \,)(\, u^2 + v^2) = [au][bu] + [av][bv] \,. \tag{2}$$

---

[1] Cf. R. Mehmke. *Vorlesungen über Punkt und Vektorenrechnung*, I, 1, p. 289.