Chapitre IV. Les similitudes vectorielles du plan et leur produit fonctionnel Isomorphisme de ce produit et du produit cyclique des vecteurs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

CHAPITRE IV.

Les similitudes vectorielles[1] *du plan et leur produit fonctionnel. Isomorphisme de ce produit et du produit cyclique des vecteurs.*

On désigne sous le nom de similitudes vectorielles les homographies du plan qui, appliquées à un vecteur, le font tourner d'un angle défini et altèrent en outre sa longueur dans un rapport déterminé. Comme il est bien connu, ces similitudes ont fourni la première représentation géométrique des nombres complexes. Nous noterons ici par $)\frac{b}{a}$ l'opérateur qui, appliqué à a, le transforme en b par une opération de la nature indiquée, donc :

$$\mathcal{H}(a =)\frac{b}{a}(a = b\ . \qquad (1)$$

Si on définit en particulier l'opération identique $\mathfrak{U}$ (qu'on se contente en général d'écrire 1), et le verseur droit $\mathcal{J}$, toute autre similitude $\mathcal{H}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H} = \lambda \mathfrak{U} + \mu \mathcal{J} \qquad (2)$$

c'est-à-dire que :

$$\mathcal{H}(a = \lambda \mathfrak{U}(a + \mu \mathcal{J}(a$$

quel que soit a.

Nous rappelons encore que le *produit fonctionnel* ou *séquence* de deux opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ est défini par :

$$\mathcal{H}(\mathcal{H}'(a \qquad (3)$$

de sorte que nous utiliserons pour lui le même symbole (c'est-à-dire la demi-parenthèse que nous employons aussi pour séparer l'opérateur de l'objet).

Les similitudes du plan formant un système linéaire à deux

[1] Cf. C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO. *Analyse vectorielle générale*, I. Transformations linéaires, p. 47.

unités: $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{J}$, on sait qu'elles satisfont à l'équation fondamentale de Hamilton-Cayley :

$$\mathcal{H}^{(2} - 2\alpha\mathcal{H} + \beta = 0 \qquad (4)$$

ou :

$$\mathcal{H}^{(2} - 2\alpha\mathcal{H}(\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{U}^{(2} = 0$$

Les coefficients α et β de cette équation étant donnés par[1]:

$$\left\{\begin{aligned} 2\alpha[ab] &= 2[\mathcal{H}\mathfrak{U}][ab] = [\mathcal{H}a \, . \, b] + [a \, . \, \mathcal{H}b] \\ \beta[ab] &= \mathcal{H}^{\mathrm{II}}[ab] = [\mathcal{H}a \, . \, \mathcal{H}b] \, . \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

Le produit fonctionnel des opérateurs étant associatif, on peut déduire toutes ses propriétés de l'équation de Hamilton-Cayley relative à $\mathfrak{J}$, à savoir :

$$\mathfrak{J}^{(2} + \mathfrak{U}^{(2} = 0 \qquad (6)$$

à laquelle il convient de joindre :

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{J}(= \mathfrak{J}) \, . \qquad (6)$$

Soit u un vecteur unitaire, v un vecteur unitaire perpendiculaire. Avec la notation indiquée, on a :

$$\mathfrak{U} =)\frac{u}{u} \qquad \mathfrak{J} =)\frac{v}{u}$$

donc :

$$\left\{\begin{aligned} &\left()\frac{u}{u}\right)^{(2} + \left()\frac{v}{u}\right)^{(2} = 0 \\ &)\frac{u}{u}\Big()\frac{v}{u} =)\frac{v}{u}\Big()\frac{u}{u} \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

équations qu'on peut rapprocher de celles qui sont à la base du produit cyclique des vecteurs:

$$\left\{\begin{aligned} &u\overset{2}{\smile} + v\overset{2}{\smile} = 0 \\ &u \smile v = v \smile u \end{aligned}\right. \qquad (8)$$

et qui montrent l'isomorphisme des deux produits soumis aux mêmes lois formelles. Mais cet isomorphisme est ici très intime,

[1] Cf. R. MEHMKE. *Vorlesungen über Punkt und Vektorenrechnung*, I, 1, p. 320.

en ce sens que les produits précédents peuvent en somme « *se substituer l'un à l'autre en toute proportion* ».

Nous commencerons cependant par montrer que l'orientante d'une forme est bien définie indépendamment de toute direction de repère, malgré qu'il y figure les vecteurs isotropes j_1 et j_2 définis à partir de u et v.

Soit en effet:

$$u' = \cos\varphi\, u + \sin\varphi\, v$$
$$v' = -\sin\varphi\, u + \cos\varphi\, v\ .$$

Posons:

$$j_1' = u' + \iota v' \qquad j_2' = u' - \iota v'\ .$$

On voit que:

$$j_1' = e^{-\iota\varphi} j_1 \qquad j_2' = e^{\iota\varphi} j_2\ .$$

On savait bien que l'ombilicale était indépendante de toute rotation des axes, c'est-à-dire:

$$j_1' j_2' = j_1 j_2\ .$$

On voit en outre qu'on a aussi:

$$\frac{1}{[j_1 j_2]^n}\left((f^{(n)})(j_2^n) j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n) j_2^n\right)$$
$$= \frac{1}{[j_1' j_2']^n}\left((f^{(n)})(j_2'^n) j_1'^n - (f^{(n)})(j_1'^n) j_2'^n\right)$$

c'est-à-dire que les produits cycliques sont bien définis de façon *absolue*.

Soit maintenant une forme:

$$f^{(n)} = abc \ldots l$$

évidemment indifférente à l'effet de l'opération identique $\mathfrak{U}$ sur un de ses facteurs; il en sera de même de son orientante.

Agissons ensuite avec le verseur droit $\mathfrak{J}$ sur un des facteurs de $f^{(n)}$, a par exemple, et voyons l'effet produit sur l'orientante. Il est évidemment permis de supposer a unitaire, et par suite de supposer a identique au vecteur u à partir duquel nous avons construit la forme orientante.

Alors:

$$[aj_2] = -\iota[a\mathcal{J}a] \qquad [aj_1] = \iota[a\mathcal{J}a]$$

et après la rotation:

$$[\mathcal{J}a \,.\, j_2] = [\mathcal{J}a \,.\, a] \qquad [\mathcal{J}a \,.\, j_1] = [\mathcal{J}a \,.\, a]$$

$$[\mathcal{J}a \,.\, j_2] = -\iota[aj_2] \qquad [\mathcal{J}a \,.\, j_1] = \iota[aj_1] \,.$$

Par suite, si:

$$a \smile b \smile c \ldots \smile l = \varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n \tag{9}$$

$$\mathcal{J}a \smile b \smile c \ldots \smile l = -\iota(\varphi_1 j_1^n + \varphi_2 j_2^n) \,. \tag{10}$$

Quel que soit le facteur de $f^{(n)}$ sur lequel on aurait opéré, on serait arrivé au même résultat, ce qui montre que l'opération $\mathcal{J}$ est permutable avec les facteurs du produit cyclique; comme cela a lieu aussi pour la multiplication par un nombre et l'opération $\mathcal{U}$, cela est général pour toute similitude $\mathcal{H}$, et on pourra écrire:

$$\mathcal{H}(a \smile b \smile \ldots \smile l = \mathcal{H}a \smile b \smile c \ldots \smile l = \ldots = a \smile b \ldots \smile \mathcal{H}l \tag{11}$$

En particulier si:

$$a \smile b \ldots \smile l = x^{\overset{n}{\smile}}$$

on aura:

$$\mathcal{H}(x^{\overset{n}{\smile}} = \left(\mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}x\right)^{\overset{n}{\smile}} = \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}a \smile \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}b \ldots \smile \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}l$$

c'est-à-dire que l'effet de l'opération $\mathcal{H}$ sur une orientante peut être réparti uniformément sur tous les facteurs de celle-ci, et ceci quelle que soit la détermination prise pour $\mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}$; autrement dit, faire subir la rotation φ à un facteur d'un produit $f^{(n)}$ revient à faire tourner l'orientante de cette forme de l'angle $\frac{\varphi}{n}$.

De même, si des similitudes $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, ... etc. ont opéré sur divers émélents de $f^{(n)}$, le résultat réalisé sur l'orientante pourra simplement s'écrire:

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}(\ldots(a \smile b \ldots \smile l \,.$$

Soit maintenant une équation cyclique:

$$a \smile b \smile \ldots \smile l = a' \smile b' \ldots \smile l' \,.$$

Dans ce système, la division par a' est possible[1] au second membre, donc au premier, et donne:

$$)\frac{a \smile b \ldots \smile l}{a'} = b' \smile \ldots \smile l'$$

qu'on peut encore écrire:

$$)\frac{a}{a'}(b \smile c \ldots \smile l = b' \smile c' \ldots \smile l' .$$

Et comme on peut du reste faire apparaître au second membre un facteur quelconque u, en écrivant par exemple:

$$a' =)\frac{a'}{u}(u$$

on pourra en général diviser les deux membres d'une équation cyclique par tel facteur qu'on voudra, en susbtituant ainsi à chaque fois une similitude à un vecteur; de même qu'on pourra s'arrêter après un certain nombre de ces opérations, ayant ainsi ramené l'équation:

$$a \smile b \ldots \smile l = a' \smile b' \ldots \smile l'$$

à une forme:

$$p \smile q \smile r = p' \smile q' \smile r'$$

par exemple.

On pourra également faire les opérations inverses en multipliant par des vecteurs. Il n'y a donc qu'une différence d'*interprétation* entre les équations entre orientantes et celles entre similitudes; on voit en outre que de nombreuses opérations intermédiaires sont possibles, qui donnent facilement autant d'énoncés géométriques.

Remarquons encore que l'orientante d'un vecteur est ce vecteur lui-même et qu'on peut pousser les divisions par des vecteurs dans le système du produit cyclique au delà des similitudes et envisager des opérateurs tels que:

$$)\frac{1}{a \smile b \smile \ldots \smile l}$$

[1] J'ai déjà employé cette méthode dans un cas particulier. *Enseignement mathématique*, XXII, 3.

qui, agissant sur un produit de $n+1$ facteurs, redonnent un vecteur, soit:

$$)\frac{1}{a \smile b \ldots \smile l}(a' \smile b' \ldots \smile l' \smile m' = m\ .$$

Nous verrons un peu plus tard comment on peut transformer ces opérateurs.

Remarque. Nous avons, chemin faisant, remarqué que l'opération $\mathcal{J}$, appliquée à une orientante:

$$\varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n$$

la transformait en:

$$-\iota(\varphi_1 j_1^n + \varphi_2 j_2^n)\ .$$

Ceci donne un sens plus précis aux opérations $\mathcal{A}_n$ précédemment employées:

$$\mathcal{A}_n = \iota\mathcal{J} \tag{12}$$

et montre que l'opération $\mathcal{A}_n$ est indépendante de son indice n.

En outre, la formule fondamentale (9) ch. III, devient:

$$f^{\overset{(n)}{\smile}} = \frac{\iota}{2}\left(g^{\overset{(p)}{\smile}}\mathcal{J}h^{\overset{(q)}{\smile}} + h^{\overset{(q)}{\smile}}\mathcal{J}g^{\overset{(p)}{\smile}}\right) = g^{\overset{(p)}{\smile}} \smile h^{\overset{(q)}{\smile}}\ . \tag{13}$$

Chapitre V

Nouveaux développements sur les similitudes. Anti-similitudes et affinités.

On sait qu'à une similitude:

$$\mathcal{H} = \lambda\mathfrak{U} + \mu\mathcal{J}$$

on peut adjoindre la similitude conjuguée:

$$\mathbf{K}\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}} = \lambda\mathfrak{U} - \mu\mathcal{J}$$

qui a même équation fondamentale que $\mathcal{H}$, comme cela résulte de l'égalité des invariants:

$$\begin{cases} [\mathfrak{U}\overline{\mathcal{H}}] = [\mathfrak{U}\mathcal{H}] = \lambda \\ \overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{II}} = \mathcal{H}^{\mathrm{II}} = \lambda^2 + \mu^2 \qquad \text{(norme de } \mathcal{H}) \end{cases}$$