Chapitre VI. Extension du produit intérieur aux points et segments. Système linéaire des cercles du plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Chapitre VI

Extension du produit intérieur aux points et segments. Système linéaire des cercles du plan.

Nous avons là encore besoin de quelques notions de calcul géométrique pour écrire les relations projectives entre les divers éléments du plan: points, segments (droites), et leurs produits algébriques. Nous allons très brièvement citer l'indispensable pour préciser nos notations.

Les points du plan — y compris les vecteurs — dépendent linéairement de trois unités. Par le produit *extérieur*, on définit:

$$[ab] = -[ba]$$

(ou encore $\overline{ab}$ ou $a.b$), qui n'est plus ici un scalaire, mais un nouvel élément appelé *segment* (orienté), puis:

$$[abc] = [bca] = [cab] = -[bac] = -[acb] = -[cba]$$

(ou encore $\overline{abc}$, $a.b.c$) élément scalaire mesurant deux fois l'aire orientée du triangle abc. Les segments dépendent eux aussi de $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ unités et forment un nouveau système linéaire, complémentaire de celui des points. Leurs produits extérieurs redonnent le point et l'aire orientée. Les segments considérés en tant qu'éléments seront représentés par des grandes lettres A, B, etc.

En géométrie affine, on distingue le système des vecteurs, ou points de la droite de l'infini $J = [uv]$; avec un point a quelconque, cette droite détermine un invariant, la *masse* du point $\alpha = [aJ]$; la masse d'un vecteur est nulle.

A un segment $A = [ab]$ appartient un vecteur déterminé:

$$[A \,.\, J] = [aJ]b - [bJ]a$$

de sorte que si les points a et b sont de masse 1, ce vecteur s'écrit:

$$b - a$$

Nous représenterons encore par $\overrightarrow{ab}$ le vecteur d'un segment $\overline{ab}$, puisqu'il s'agit là d'un produit entre les points a et b et le bivecteur J.

Remarquons que le vecteur d'un bivecteur λJ est nul. Les produits algébriques de points définissent des formes de divers degrés ou classes; il en est de même des produits algébriques de droites (ou segments) qui définissent des formes d'ordres divers. Combinées entre elles par des produits convenables, ces formes donnent des combinaisons scalaires. Nous considérerons entre formes de même classe les produits construits sur les modèles suivants:

$$\textit{polaire} \qquad a^2)(b^2 = b^2)(a^2 = [ab]^2$$

$$A^2)(B^2 = B^2)(A^2 = [A . B]^2$$

puis:

$$a^2)(b^2)(c^2 = \ldots = [abc]^2$$

$$A^2)(B^2)(C^2 = \ldots = [ABC]^2$$

et de même pour les formes d'ordres supérieurs.

Ainsi, $f^{(3)}$ représentant une courbe de 3^e classe, X une droite variable, l'équation tangentielle de la courbe est:

$$f^{(3)})(X^3 = 0$$

de sorte que si la droite X contient un point fixe m et un point variable x, cette équation s'écrivant:

$$f^{(3)})(m^3)(x^3 = 0$$

$f^{(3)})(m^3$ représente la courbe de 3^e ordre formée par les tangentes menées de m à $f^{(3)}$.

De même, entre des formes contrevariantes de degrés différents $f^{(n)}$ et $G^{(p)}$, si n est supérieur à p, par exemple:

$$f^{(n)})(G^{(p)}$$

est une forme de classe n-p; si elle est identiquement nulle, $G^{(p)}$ est apolaire à $f^{(n)}$.

Des produits de forme:

$$f^{(n)r} \cdot g^{(p)} = \Sigma [ab]^r a^{n-r} b^{p-r}$$

$$f^{(n)r} \cdot G^{(p)} = \Sigma [aB]^r a^{n-r} B^{p-r}$$

définissent des formes *mixtes* dont nous nous servirons le moins possible. Cependant le produit:

$$\textit{jacobien généralisé} \quad [a^{(n)} \,.\, b^{(n)} \,.\, c^{(n)} \ldots] \quad \text{ou} \quad a^{(n)} \,.\, b^{(n)} \,.\, c^{(n)} \ldots$$

conserve la propriété simple d'exprimer, quand il est nul, que les formes $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, etc., sont liées par une relation linéaire à coefficients numériques.

En géométrie métrique, nous ferons usage, au moins pour l'exposition, des vecteurs isotropes j_1 et j_2 précédemment utilisés, et entre deux droites A et B nous définirons le *produit intérieur*:

$$A \times B = AB \,)(\, j_1 j_2 \qquad (1)$$

(ou, si l'on préfère, le quotient de l'expression précédente par $\overset{2}{u^{\times}}$). On peut du reste toujours, s'il s'agit de géométrie affine ou métrique, supposer que les points qui définissent les droites sont de masse unité — en tenant compte de la *loi de conservation des masses* — et nous le ferons désormais. En conséquence, soient m et n des points de A et B, a et b les vecteurs de ces segments.

$$A = \overline{ma} \qquad B = \overline{nb}$$

$$A \times B = a \times b \qquad \text{ou} \qquad \overline{ma} \times \overline{nb} = \overrightarrow{ma} \times \overrightarrow{nb}$$

c'est-à-dire que le *produit intérieur de deux segments est égal à celui de leurs vecteurs.*

Nous allons maintenant définir le *produit intérieur de deux points*, soient m et n.

$$m \times n = mn \,)(\, j_1 j_2 = \frac{1}{2}\left([mj_1][nj_2] + [mj_2][nj_1]\right) \,. \qquad (2)$$

Ce produit intérieur est donc une forme du second ordre, d'équation:

$$mn \,)(\, j_1 j_2 \,)(\, x^2 = 0 \,.$$

Comme cette équation exprime aussi:

$$mn \,)(\, x^2 \,)(\, j_1 j_2 = \overline{mx}\,\overline{nx} \,)(\, j_1 j_2 = \overline{mx} \times \overline{nx} = 0$$

la forme $m \times n$ est le cercle de diamètre m, n.

Plus généralement, à une forme de 2e classe $f^{(2)}$ appartient ainsi une forme intérieure:

$$\overset{(2)}{f^{\times}} = f^{(2)})(j_1 j_2 \tag{3}$$

et qui est le cercle de Monge (orthoptique) de la courbe de seconde classe représentée par $f^{(2)}$.

Une forme *ma*, où *a* est un vecteur (et plus généralement une conique tangente à la droite de l'infini) donnera naissance à la forme intérieure:

$$m \times a$$

qui représente la droite menée en *m* perpendiculairement au vecteur *a* (ou une droite de Monge).

Les cercles, droites, et le produit intérieur de deux vecteurs, qui représente la droite de l'infini, forment un système linéaire à quatre unités— dans lequel les droites forment un système à trois unités. Ce système a été maintes fois étudié, soit au moyen des coordonnées quadri-circulaires, soit par les méthodes de Grassmann [1], bien qu'on ait jusqu'ici rarement accepté la définition du produit intérieur des points, à laquelle nous pensons rendre ici sa place.

Si o, u, v sont un point quelconque du plan et deux vecteurs unitaires rectangulaires, ce produit obéit aux lois formelles:

$$o \times u = u \times o \qquad o \times v = v \times o$$

$$u \times v = v \times u = 0 \qquad \overset{2}{u^{\times}} = \overset{2}{v^{\times}}$$

d'où les quatre unités du système:

$$\overset{2}{o^{\times}}, \quad o \times u, \quad o \times v, \quad \overset{2}{u^{\times}}$$

Si m est un élément quelconque, point ou vecteur, toute forme intérieure $\Sigma\mu \overset{2}{m^{\times}}$ peut être, d'une infinité de manières, réduite à un produit de deux éléments. Soit en effet à résoudre:

$$\Sigma\mu \overset{2}{m^{\times}} = x \times y \tag{4}$$

[1] Cf. par exemple, E. MULLER. *Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre-Monatshefte f. Math. u. Phys.* III, IV.

On peut remplacer cette équation par l'équivalence:

$$\Sigma\mu\, m^2 = xy + \lambda_1 j_1^{2} + \lambda_2 j_2^{2} \qquad (5)$$

ou:

$$\Sigma\mu\, m^2 = xy \qquad \left(\text{modules } j_1^{2} \,,\, j_2^{2}\right)$$

La première polaire de la droite de l'infini:

$$\Sigma\mu\, m = \Sigma\mu\, m^2 \;)(\; \mathrm{J} = xy \;)(\; \mathrm{J} = \frac{1}{2}(x+y)$$

détermine le centre à distance finie ou infinie; la combinaison polaire $\Sigma\mu\, m^2 \;)(\; \mathrm{J}^2$ aurait de même exprimé la conservation des masses, que nous avons supposée réalisée: $\Sigma\mu = 1$.

On peut ensuite, soit résoudre l'équivalence, soit former l'équation du 2e degré ayant les séries de racines x, y et qui est:

$$x^{\overset{2}{\times}} - 2\Sigma\mu\, m \times x + \Sigma\mu\, m^{\overset{2}{\times}} = 0$$

d'où:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \Sigma\mu\, m \pm \sqrt{(\Sigma\mu\, m)^{\overset{2}{\times}} - \Sigma\mu\, m^{\overset{2}{\times}}} = o \pm \rho \sqrt{u^{\overset{2}{\times}}}$$

si o est le centre du cercle, ρ son rayon réel ou imaginaire.

On aurait une résolution analogue dans le cas d'une droite à distance finie ou infinie.

L'emploi de l'équivalence (5) a montré qu'une forme intérieure est en réalité attachée à un réseau de formes de 2e classe.

Dans le système des cercles, on sait former de nouveau des produits extérieur et intérieur. Nous définirons directement ce dernier de la façon suivante; l'expression:

$$f^{(2)} \;)(\; j_1 j_2 \;)(\; g^{(2)} = f^{\overset{(2)}{\times}} \;)(\; g^{(2)} = f^{(2)} \;)(\; g^{\overset{(2)}{\times}}$$

est une fonction linéaire de chacune des formes intérieures $f^{\overset{(2)}{\times}}$ et $g^{\overset{(2)}{\times}}$, et on peut montrer qu'elle coïncide avec ce produit intérieur (qu'on peut définir à un facteur constant près). C'est elle que nous choisirons comme *produit intérieur de deux cercles* (ou droites) et représenterons par:

$$f^{\overset{(2)}{\times}} \,\Big|\, g^{\overset{(2)}{\times}} = f^{(2)} \;)(\; g^{(2)} \;)(\; j_1 j_2 \qquad (6)$$

On sait que cette expression est la puissance mutuelle de deux circonférences; le calcul est du reste aisé:

$$\varpi = \left(o\overset{2}{\times} - \rho^2 u\overset{2}{\times}\right) \Big| \left(o'\overset{2}{\times} - \rho'^2 u\overset{2}{\times}\right) = o\overset{2}{\times} \Big| o'\overset{2}{\times} - u\overset{2}{\times} \Big| \left(\rho^2 o'\overset{2}{\times} + \rho'^2 o\overset{2}{\times}\right)$$

$$= \overline{oo'}\overset{2}{\times} - \rho^2 - \rho'^2 .$$

Si les cercles ont été pris sous les formes $a \times b$ et $a' \times b'$:

$$\varpi = \frac{1}{2}\left(\overline{aa'} \times \overline{bb'} + \overline{ab'} \times \overline{ba'}\right)$$

Quand les cercles sont orthogonaux, cette puissance est nulle. Sous la forme: $ab\ )(\ cd\ )(\ j_1 j_2 = o$ cela exprime que les couples *ab et cd* sont conjugués harmoniques sur une hyperbole équilatère, d'où le théorème réciproque: les cercles décrits avec deux tels couples aux extrémités d'un diamètre, sont orthogonaux. En développant l'expression précédente sous la forme:

$$(a' - a) \times (b' - b) + (b' - a) \times (a' - b) = 0$$

ou:

$$2(a \times b + a' \times b') = (a + a') \times (b + b')$$

on retrouve l'analogue de la relation harmonique; en outre:

$$\frac{a \times b + a' \times b'}{2} = \frac{a + a'}{2} \times \frac{b + b'}{2}$$

exprime que le cercle ayant pour points diamétraux les centres des deux cercles orthogonaux appartient au faisceau linéaire de ceux-ci (condition nécessaire et suffisante pour l'orthogonalité). On voit le principe de ces calculs: le produit intérieur des cercles se développe comme un produit polaire du domaine binaire, mais les segments qui apparaissent ainsi, et ne sont plus scalaires, sont soumis à une multiplication intérieure; dans le produit intérieur obtenu, on peut remplacer les segments par leurs vecteurs; si on exprime ceux-ci comme différences de points, on retrouve de nouvelles identités à interpréter entre produits intérieurs de points, c'est-à-dire entre cercles.

Les relations métriques sur la droite ne sont que des cas particuliers de ces relations entre cercles du plan, mais inversement l'analogie entre les relations telles que:

$$a^2 \,)(\, b^2 = \overline{ab}^2 = (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$$

sur la droite, et:

$$\overset{2}{a^{\times}} \,\Big|\, \overset{2}{b^{\times}} = \overset{2}{\overline{ab}^{\times}} = \overset{2}{(b - a)^{\times}} = \overset{2}{b^{\times}} - 2a \times b + \overset{2}{a^{\times}}$$

dans le plan, fournit un *principe de transfert* utile, et développé dans le sens où Grassmann a exposé l'algèbre du domaine binaire comme celle du produit intérieur. Il est permis de penser que ce calcul donne plus que celui des coordonnées, qui ne considère les relations entre cercles qu'à partir d'un point, d'ailleurs arbitraire, mais extérieur au système: ce que nous obtenons, par exemple, à partir de la dernière relation, en formant l'expression:

$$\overset{2}{\overrightarrow{pb}^{\times}} - 2\overrightarrow{pa} \times \overrightarrow{pb} + \overset{2}{\overrightarrow{pa}^{\times}} .$$

On aura beau multiplier les points de vue p desquels on regarde le système, il sera évidemment difficile d'avoir une idée aussi nette de sa constitution que celle qui résulte de la composition de ses éléments !

Toutes les relations métriques entre cercles, droites et points, s'obtiennent et s'interprètent immédiatement; citons seulement la condition de contact de deux cercles exprimant que leur faisceau est singulier:

$$\overset{2}{(\overset{(2)}{f^{\times}} \cdot \overset{(2)}{g^{\times}})|} = 0$$

la condition pour que trois cercles passent par un point, ou forment un réseau singulier:

$$\overset{2}{(\overset{(2)}{f^{\times}} \cdot \overset{(2)}{g^{\times}} \cdot \overset{(2)}{h^{\times}})|} = 0$$

etc., qui toutes se développent sur le type des formes du domaine binaire.

Nous voulons revenir en particulier sur la condition exprimant que quatre points sont sur un cercle:

$$\overset{2}{a^{\times}} \cdot \overset{2}{b^{\times}} \cdot \overset{2}{c^{\times}} \cdot \overset{2}{d^{\times}} = 0 . \qquad (7)$$

On sait que le développement du carré intérieur du premier membre donne le théorème de Ptolémée; nous allons donner d'autres développements de cette condition, qui indique une relation de la forme:

$$\alpha\, a^{\overset{2}{\times}} + \beta\, b^{\overset{2}{\times}} + \gamma\, c^{\overset{2}{\times}} + \delta\, d^{\overset{2}{\times}} = 0 \qquad (8)$$

ou

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \delta d^2 + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2 = 0 \qquad (9)$$

ce qui donne la condition sous forme projective:

$$a^2 \,.\, b^2 \,.\, c^2 \,.\, d^2 \,.\, j_1^2 \,.\, j_2^2 = 0 \;. \qquad (10)$$

Paul Serret, dans sa « Géométrie de Direction », a étudié plusieurs des formes qu'on peut donner à la relation précédente entre six points sur une conique. C'est ainsi qu'elle se transforme aisément en:

$$\overline{ab}^2 \,.\, \overline{bc}^2 \,.\, \overline{ca}^2 \,.\, \overline{dj_1}^2 \,.\, \overline{dj_2}^2 \,.\, \overline{j_1j_2}^2 = 0 \qquad (11)$$

et exprime qu'une courbe de 2e classe est inscrite dans les triangles abc et dj_1j_2: cette courbe est une parabole de foyer d, dont la tangente au sommet est la droite de Simson de ce point par rapport au triangle abc. Ou encore la relation (11) signifie que ces deux triangles abc et dj_1j_2 sont conjugués à une même courbe du 2e ordre, à savoir l'hyperbole équilatère de centre d passant par les sommets du quadrangle orthocentrique ayant abc pour triangle diagonal, et le cercle figure ici comme cercle des 9 points. On peut aussi employer la forme remarquable:

$$\left(\overline{ab}\,\overline{cd} \,.\, \overline{ac}\,\overline{db}\;)(\; j_1^2 \,.\, j_2^2\right) = 0 \qquad (12)$$

ou

$$\begin{vmatrix} \overline{ab}\,\overline{cd}\;)(\; j_1^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\;)(\; j_1^2 \\ \overline{ab}\,\overline{cd}\;)(\; j_2^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\;)(\; j_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

qu'on peut du reste modifier grâce à l'identité:

$$\overline{ab}\,\overline{cd} + \overline{ac}\,\overline{db} + \overline{ad}\,\overline{bc} = 0 \qquad (13)$$

et sur laquelle nous aurons à revenir.

Au point de vue métrique, si a, b, c, d sont des points, non des vecteurs, les masses:

$$a^{\overset{2}{\times}} \mid u^{\overset{2}{\times}}, \quad b^{\overset{2}{\times}} \mid u^{\overset{2}{\times}}, \quad c^{\overset{2}{\times}} \mid u^{\overset{2}{\times}}, \quad d^{\overset{2}{\times}} \mid u^{\overset{2}{\times}}$$

étant toutes égales à l'unité, la relation (9) donne, en prenant la 1re forme polaire de la droite de l'infini J:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$$

relation qui se déduit aussi de (8) en prenant:

$$\alpha\,\overline{au} \times \overline{ax} + \beta\,\overline{bu} \times \overline{bx} + \gamma\,\overline{cu} \times \overline{cx} + \delta\,\overline{du} \times \overline{dx} = 0\ .$$

On en déduit aussitôt:

$$\frac{[bcd]}{\alpha} = \frac{-\,[cda]}{\beta} = \frac{[dab]}{\gamma} = \frac{-\,[abc]}{\delta}$$

ce qui satisfait aussi à:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0\ .$$

En outre (8) peut s'écrire:

$$\alpha\left(a^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) + \beta\left(b^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) + \gamma\left(c^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) = 0$$

$$\left(a^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) . \left(b^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) . \left(c^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) = 0$$

ou:

$$\frac{a+d}{2} \times (a-d) \,.\, \frac{b+d}{2} \times (b-d) \,.\, \frac{c+d}{2} \times (c-d) = 0$$

ce qui exprime que les droites menées perpendiculairement à ad, bd, cd en leur milieu, concourent au centre du cercle, et permet le calcul de ce centre.

Ces exemples élémentaires suffisent sans doute à montrer la simplicité du calcul employé. Ajoutons qu'il se généralise pour ainsi dire sans changement en un calcul appliqué aux sphères de l'espace, et qu'en outre cercles et sphères rentrent dans un système plus étendu de cercles et sphères orientés qui nécessite, par exemple, dans le plan, qu'on substitue aux points les cycles de Laguerre: j'espère montrer dans une autre occasion que ceux-ci sont les éléments de produits intérieurs qui fournissent sans peine des combinaisons intéressantes.