APPLICATION DE L'INTÉGRATION PAR PARTIES AU DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

Autor(en): **Jablonski, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19732

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

APPLICATION DE L'INTÉGRATION PAR PARTIES AU DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

PAR

E. JABLONSKI (Royan).

Li'ntégration par parties conduit sans peine à une formule très générale, non remarquée encore je crois, d'où l'on peut déduire la formule de Maclaurin et par suite celle de Taylor, c'est-à-dire toutes les formes classiques des développements en séries et en plus d'autres formes de développements qui ne sont pas sans intérêt. Ce qui suit est cependant à rapprocher des pages fondamentales du *Traité d'Analyse* de M. Emile PICARD (T. I, 2me édition, ch. I, § V).

1. Soit y une fonction quelconque d'une variable indépendante x (nous nous bornerons ici au cas d'une fonction réelle d'une variable réelle, mais la généralisation est aisée). Soit x_0 une valeur particulière de x, y_0 la valeur correspondante de y, nous supposerons seulement que y et toutes ses dérivées, jusqu'à celle d'ordre $n + 1$ incluse, soient finies et bien déterminées pour toute valeur de x telle que $\mathrm{mod}\,(x - x_0) \leqq a$ nombre positif convenablement choisi. On peut, sans restreindre la généralité de ce qui suivra, faire comme si x_0 était nul en convenant de remplacer x par $x_0 + x$. Cela posé, on a évidemment

$$y \equiv y_0 + \int_0^x \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

d'où, par applications successives de l'intégration par parties

$$y \equiv y_0 + x\frac{dy}{dx} - \int_0^x x\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

$$y \equiv y_0 + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2!}\int_0^x x^2\frac{d^3y}{dx^3}\cdot dx$$

. . . .

et enfin

$$y \equiv y_0 + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n\frac{d^ny}{dx^n}$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x x^n\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}dx \tag{1}$$

Considérons la série

$$S = y_0 + \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p!}x^p\frac{d^py}{dx^p}.$$

Si, pour mod $(x) \leqq a$ et $0 \leqq q \leqq p - 1$, $x^q\frac{d^py}{dx^p}$ reste fini quelque grand que soit p, la série S est absolument convergente et représente la fonction y. En effet soit mod $\left(x^q\frac{d^py}{dx^p}\right) < A$ nombre positif assignable, le terme général de S est moindre en valeur absolue que mod $\left(\frac{1}{p!}x^{p-q}.A\right)$, elle est donc absolument convergente; d'autre part, en vertu de (1)

$$y = S_n + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x x^n\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\cdot dx,$$

S_n tend vers S et le terme complémentaire est, en valeur absolue, moindre que mod $\left(\frac{1}{n!(n-q+1)}\cdot x^{n-q}.A\right)$ et par suite moindre que $\frac{Aa^{n-q}}{n!(n-q+1)}$ qui tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment; le terme complémentaire tend donc vers zéro et par suite y est bien la valeur de la série S pour mod$(x) \leqq a$.

Dans le cas particulier de $q = 0$ la condition est que $\frac{d^py}{dx^p}$ reste finie lorsque p croît indéfiniment.

2. En se bornant à ce cas particulier on peut facilement étendre la formule à une fonction d'autant de variables que l'on voudra indépendantes ou non. Soit $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$ qui reste finie et bien déterminée ainsi que toutes ses dérivées partielles, quelque grands qu'en soient les indices, sous les conditions $\mathrm{mod}(x_i) \leqq a_i$, nombre positif convenablement choisi, où i peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à m. Considérons la fonction de l'unique variable indépendante t

$$z = f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)$$

en vertu des hypothèses faites, cette fonction et toutes ses dérivées par rapport à t restent finies et bien déterminées quelque grand que soit l'ordre de la dérivée considérée sous la seule condition $t \leqq 1$; on peut donc lui appliquer la formule précédente et l'on aura, en faisant $t = 1$,

$$y = f(0, 0, \ldots 0) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p!} \left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(p)} \quad \text{(puissance symbolique).}$$

3. De la formule (1) on peut déduire la formule de Maclaurin, avec une forme du terme complémentaire non encore remarquée et qui contient, comme cas particuliers les formes classiques de Lagrange et de Cauchy. En effet, on peut appliquer la formule (1) non seulement à y, mais à toutes ses dérivées jusqu'à celle d'ordre n incluse; on a ainsi:

$$y \equiv y_0 + x \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^n \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x x^n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} x^{n-1} \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^x x^{n-1} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + x\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-3}}{(n-2)!} x^{n-2} \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \int_0^x x^{n-2} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} dx$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \equiv \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) + x\frac{d^ny}{dx^n} - \int_0^x x \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot dx$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} \equiv \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 + \int_0^x \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot dx \;;$$

en multipliant les deux membres de ces identités, dans leur ordre, respectivement par

$$1\,,\ \frac{x}{1}\,,\ \frac{x^2}{2\,!}\,,\ \ldots\ \frac{x^n}{n\,!}$$

et ajoutant membres à membres, on obtient, toutes réductions faites :

$$y = y_0 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2\,!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \frac{x^n}{n\,!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 + \mathrm{R} \qquad (2)$$

ce qui est la formule de Maclaurin, où R, terme complémentaire, est donné par la formule:

$$\mathrm{R} = \frac{(-1)^n}{n\,!}\int_0^x x^n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,dx + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!}\cdot\frac{x}{1\,!}\int_0^x x^{n-1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,dx + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)\,!}\cdot\frac{x^p}{p\,!}\int_0^x x^{n-p}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,dx + \ldots + \frac{x^n}{n\,!}\int_0^x \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,dx\ .$$

En écrivant z au lieu de x, hors du signe d'intégration et faisant comme si z était indépendant de x, on peut écrire:

$$\mathrm{R} = \frac{1}{n\,!}\int_0^x (z-x)^n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,.\,dx \qquad (3)$$

où l'on intègrera comme si z était constant; après intégration, on fera $z = x$. Pour déduire de (3) la forme de Cauchy écrivons

$$\mathrm{R} = \frac{1}{n\,!}\int_0^x (z-x)^{n-q}(z-x)^q \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,.\,dx\ , \qquad (q \leqq n)$$

puis remplaçons sous le signe d'intégration $(z - x)^q \dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ par la valeur que prend ce produit fonction de x pour une valeur fixe θx ($\theta < 1$) comprise entre les deux limites de l'intégrale et convenablement choisie, nous aurons:

$$\mathrm{R} = \frac{(-1)}{n\,!\,(n-q+1)}(z-\theta x)^q\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_{\theta x}\left[(z-x)^{n-q+1} - z^{n-q+1}\right]$$

où l'on doit faire $z = x$ ce qui donne enfin:

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^q}{n!\,(n-q+1)}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_{\theta x}$$

qui est bien la forme de Cauchy; pour $q = 0$ on a celle de Lagrange.

4. Il résulte de ce qui précède que la formule (1) conduit, en passant au besoin par celle de Maclaurin à tous les développements connus des fonctions en série mais elle peut aussi conduire directement à ces résultats ou à d'autres que la formule de Maclaurin ne peut pas donner. J'en vais exposer quelques exemples.

1° Appliquons la formule à $y = e^{-x}$ on a immédiatement

$$e^{-x} \equiv 1 - \frac{x}{1!}e^{-x} - \frac{x^2}{2!}e^{-x} - \frac{x^3}{3!}e^{-x} - \ldots - \frac{x^n}{n!}e^{-x} - \ldots$$

d'où

$$1 \equiv e^x - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!}\cdots - \frac{x^n}{n!} - \cdots$$

ou enfin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

quel que soit x.

2° Soit $y = (1+x)^m$, m quelconque, x positif.

La formule donne immédiatement

$$(1+x)^m \equiv 1 + \frac{m}{1}\cdot x(1+x)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2(1+x)^{m-2} + \ldots$$

d'où

$$(1+x)^{-m} \equiv 1 - \frac{m}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

ou en changeant m en $-m$

$$(1+x)^m \equiv 1 + \frac{m}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
$$+ \frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

pour toute valeur positive de x.

3° Soit $y = \mathrm{L}\,(1 + x)$.

La formule donne:

$$\mathrm{L}(1 + x) \equiv \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{1 + x} - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{x^3}{3} \frac{1}{(1 + x)^3} + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \frac{1}{(1 + x)^n} + \cdots$$

ou

$$\mathrm{L}(1 + x) \equiv \frac{x}{1 + x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{1 + x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1 + x}\right)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^n + \cdots$$

pour toute valeur positive de x.

Si on y fait $x = \frac{1}{\mathrm{N}}$, N entier positif quelconque, on a:

$$\mathrm{L}(\mathrm{N} + 1) - \mathrm{LN} = \frac{1}{\mathrm{N} + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathrm{N} + 1)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{N} + 1}\right)^3 + \cdots$$

qui donne sous forme de série rapidement convergente la différence tabulaire d'une table de logarithmes népériens c'est-à-dire le moyen de calculer cette table.

Royan, février 1921.

MELANGES ET CORRESPONDANCE

Le Problème des quatre couleurs.

A propos d'une communication de M. J. Chuard.

Dans le n° 6 du tome XXII de l'*Enseignement mathématique*, paru en mai 1923, je lis, aux pages 373 et 374, une note de M. Jules Chuard, *sur le problème des quatre couleurs*. Sans vouloir diminuer son mérite, je lui ai signalé, et je crois que cela peut être intéressant pour les lecteurs de l'*Enseignement math.*, que la proposition à laquelle il arrive n'est certainement pas exacte, dans les termes où il l'a énoncée.