MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE CALCUL DU NOMBRE DES POINTS A COORDONNÉES ENTIÈRES

Autor(en): **van der Corput, J. G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19730

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KUNDIG

MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE CALCUL DU NOMBRE DES POINTS A COORDONNÉES ENTIÈRES [1]

PAR

J. G. VAN DER CORPUT (Fribourg, Suisse et Groningue).

---

1. — *La méthode de Gauss.*

Dans les écrits laissés par Gauss [2] on trouva les fragments de deux articles qu'il avait l'intention de remettre à la Société des sciences de Göttingue dans les années 1834 et 1837, mais qu'il n'a pas achevés. Dans ces fragments Gauss déterminait au moyen des points à coordonnées entières l'aire d'une figure, et spécialement d'un cercle dont le centre coincide avec l'origine des coordonnées. Si le rayon est égal à 10, $10\sqrt{10}$, 100 ou $100\sqrt{10}$, Gauss a calculé que le cercle contient

$$317\ ,\qquad 3149\ ,\qquad 31\,417\qquad \text{ou}\qquad 314\,197$$

points entiers (c'est-à-dire points à coordonnées entières), tandis que l'aire du cercle, à une demi-unité près, a pour valeur

$$314\ ,\qquad 3142\ ,\qquad 31\,416\qquad \text{ou}\qquad 314\,159\ ,$$

de sorte que la différence est relativement petite. Dans cet article, lorsque nous parlerons des points entiers d'une figure, nous voulons parler des points à coordonnées entières situés à l'intérieur et sur le contour de cette figure.

---

[1] Conférence donnée à la première Réunion mathématique des Universités de la Suisse romande, à Genève, le 17 février 1923, par M. J. G. van der Corput, professeur à l'Université de Fribourg (Suisse). — Depuis le semestre d'été 1923 M. van der Corput occupe l'une des chaires de mathématiques de l'Université de Groningue. *Réd.*

[2] *Werke*, II, p. 269-291.

Nous pouvons nous attendre à ce que le nombre des points entiers d'une figure soit approximativement égal à l'aire de cette figure. Etant supposé que le contour de la figure a une longueur déterminée l, Gauss démontre que la différence entre ces deux quantités est comprise entre $-4(l+1)$ et $4(l+1)$. La démonstration qu'il en a donnée est la suivante:

Soit r le nombre des carrés tels que leur centre ait des coordonnées entières, leurs côtés aient l'unité pour longueur, et à l'intérieur desquels se trouve au moins un point du contour. Le nombre des points entiers de la figure est plus petit que l'aire de la figure augmentée de r, mais plus grand que cette aire, diminuée de r, de sorte que la différence entre le nombre des points entiers et l'aire de la figure est comprise entre $-r$ et r. Une portion du contour qui appartient à plus de quatre carrés différents contient au moins deux points distants de plus d'une unité. Si donc r est plus grand que $4n$, n étant entier, il y a sur le contour $n+1$ points tels que la distance entre deux points consécutifs est plus grande que 1. Alors la longueur du contour est plus grande que n, et comme nous pouvons choisir $4(n+1)$ plus grand ou égal à r, r est plus petit que $4(l+1)$, et la proposition de Gauss est démontrée.

Nous pouvons considérer comme cas particulier celui du cercle $u^2 + v^2 = x$, u et v étant des coordonnées rectangulaires. Soit $\mathrm{P}(x)$ la différence entre le nombre des points entiers du cercle et son aire. En vertu de la proposition de Gauss la valeur absolue de $\mathrm{P}(x)$ est plus petite que $4(2\pi\sqrt{x}+1)$. $\mathrm{P}(x)$ est donc au plus du même ordre que la fonction $\sqrt{x}$, ce que l'on écrit

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{O}(\sqrt{x}) \ ,$$

O désignant le symbole connu de Landau.

Nous allons traiter maintenant un autre problème, celui des diviseurs. Le nombre $d(n)$ des diviseurs du nombre entier positif n ne peut pas être représenté approximativement par une fonction simple. Par contre on peut trouver une expression simple pour représenter

$$\mathrm{D}(x) = \sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} d(n)$$

d'une manière approchée. En effet, sur l'hyperbole équilatère $uv = n$ se trouvent exactement $d(n)$ points entiers, car à chaque diviseur δ de n correspond un point à coordonnées entières δ et $\frac{n}{\delta}$ et réciproquement. La fonction $D(x)$ est donc égale au nombre des points entiers situés sur l'une des hyperboles $uv = 1, 2, \ldots, E(x)$, $E(x)$ désignant la partie entière de x. Tous ces points se trouvent dans le domaine D_1 limité par l'hyperbole $uv = x$ et par les deux droites $u = 1$, $v = 1$, et réciproquement tout point entier contenu dans ce domaine se trouve sur l'une de ces hyperboles. La fonction $D(x)$ est donc égale au nombre des points entiers du domaine D_1. L'aire de ce domaine est égale à

$$\int_1^x \left(\frac{x}{u} - 1\right) du = x \log x - x + 1 \ ,$$

et le contour a une longueur plus petite que $4\,x$, de sorte qu'en vertu de la proposition de Gauss

$$D(x) - (x \log x - x + 1)$$

est contenu entre $-4(4\,x + 1)$ et $4(4\,x + 1)$; la fonction $x \log x$ représente donc $D(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de x, donc

$$D(x) = x \log x + O(x) \ . \tag{1}$$

2. — *La méthode de Dirichlet.*

Dirichlet[1] a réussi à améliorer considérablement ce résultat de la manière suivante:

Par le point $(\sqrt{x}, \sqrt{x})$, qui se trouve sur l'hyperbole équilatère on construit une parallèle à l'axe des u et une parallèle à l'axe des v, de sorte que le domaine D_1 en question est divisé en trois parties. Une de ces parties est un carré, et l'on peut immédiatement calculer le nombre des points entiers qui y sont contenus. Les deux autres parties contiennent le même nombre de points entiers par raison de symétrie, et comme on connaît le nombre

[1] *Berl. Abh.* (1849), p. 69-83; *Werke*, II, p. 49-66.

des points entiers du carré, il ne reste donc à calculer que le nombre des points entiers du domaine D_2 limité par l'hyperbole équilatère $uv = x$ et par les trois droites $v = 1$, $u = 1$, $u = \sqrt{x}$. Les points entiers de D_2 se trouvent tous sur l'une des droites $u = 1, 2, \ldots, E(\sqrt{x})$, et la droite $u = h$ contient dans D_2 exactement $E\left(\frac{x}{h}\right)$ points entiers, de sorte que D_2 contient

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} E\left(\frac{x}{h}\right)$$

points entiers. Pour calculer approximativement $D(x)$, il suffit donc d'évaluer cette somme. Comme on peut calculer la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2}\right)$$

au moyen de la formule sommatoire d'Euler avec le degré d'exactitude voulu, on n'a qu'à évaluer la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \left(\frac{x}{h} - E\left(\frac{x}{h}\right) - \frac{1}{2}\right) .$$

Comme chaque terme est en valeur absolue $\leqq \frac{1}{2}$, la valeur absolue de la dernière somme est $\leqq \frac{1}{2}\sqrt{x}$, de sorte que l'on trouve la valeur de $D(x)$ avec une erreur qui est au plus du même ordre que $\sqrt{x}$. Si l'on pose

$$\Delta(x) = D(x) - x(\log x + 2C - 1) ,$$

C désignant la constante d'Euler, le résultat trouvé par Dirichlet est que l'ordre de $\Delta(x)$ ne surpasse pas celui de $\sqrt{x}$, donc

$$\Delta(x) = O(\sqrt{x}) . \tag{2}$$

Il est facile de généraliser ce que nous venons de dire pour l'appliquer à un domaine à k dimensions. Alors on remplacera la figure $u \geqq 1$, $v \geqq 1$, $uv \leqq x$ par le domaine

$$u_1 \geqq 1 , \quad u_2 \geqq 1 , \ldots , \quad u_k \geqq 1 , \quad u_1 u_2 \ldots u_k \leqq x ,$$

et $d(n)$ par le nombre $d_k(n)$ des décompositions de n en produit de k facteurs; par exemple $d_4(4) = 10$, parce que 4 peut être décomposé de 4 manières différentes en produit des 4 facteurs 4, 1, 1, 1 et de 6 manières différentes en produit des 4 facteurs 2, 2, 1, 1. Comme M. Piltz[1] l'a montré, on peut donner à la fonction

$$D_k(x) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \text{ entier}}} d_k(n)$$

la forme suivante

$$D_k(x) = x \sum_{h=0}^{k-1} b_{k,h} (\log x)^h + \Delta_k(x) ,$$

où les coefficients $b_{k,h}$ ne dépendent pas de x, et où

$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{k}} (\log x)^{k-2}\right) .$$

Le résultat donné par la formule (2) est naturellement bien meilleur que celui donné par la formule (1). Cependant Dirichlet a réussi à améliorer encore son propre résultat, comme on le sait par une lettre qu'il écrivit à Kronecker peu avant sa mort[2]:

« Seit unserm neulichen Gespräch auf der Fahrt von Ilsenburg nach Harzburg ist es mir gelungen, die Funktion $D(x)$, die ich bisher nur mit einem Fehler der Ordnung $\sqrt{x}$ angeben konnte, bedeutend in die Enge zu treiben. Die Auffindung des hiezu dienenden Mittels, welches aller Wahrscheinlichkeit nach auch auf die folgenden Fälle anwendbar seyn wird, macht mir zwar grosses Vergnügen, kommt mir aber in sofern zu ungelegener Zeit als ich dadurch von der Vollendung der hydrodynamischen Abhandlung abgezogen werde, welche doch endlich fertig werden muss. »

Quel résultat Dirichlet a-t-il trouvé et quelle méthode a-t-il employée, nous ne le savons pas et probablement nous ne le saurons jamais, parce que c'est un des secrets que Dirichlet enlevé en pleine activité, a emporté avec lui. C'est d'autant plus

[1] Thèse de doctorat (1881), Berlin.

[2] LEJEUNE-DIRICHLET, *Werke*, II, p. 407. Dirichlet emploie une autre notation pour la fonction $D(x)$.

difficile de savoir quelle méthode il a employée, que nous connaissons déjà cinq méthodes générales pour améliorer les résultats précédents, une méthode géométrique, une méthode arithmétique et trois méthodes analytiques, dont une découle de l'étude des variables complexes et les deux autres de l'étude des variables réelles [1].

3. — *La méthode de Voronoï.*

C'est Voronoï [2] qui a découvert la méthode géométrique (1903). Comme Dirichlet, il décompose le domaine D_1, mais il le fait d'une autre manière. Il construit q tangentes à l'hyperbole équilatère $uv = x$, de sorte que le domaine est décomposé en un polygone (de $q + 2$ côtés) et en $q + 1$ segments. Il calcule approximativement le nombre des points entiers de chacun de ces domaines; les points entiers qui pourraient se trouver sur l'une des tangentes, sont comptés ou avec le polygone ou avec l'un des segments. Il choisit le nombre q et la direction des tangentes tels que l'erreur soit la plus petite possible. Son résultat est

$$\Delta(x) = O(\sqrt[3]{x} \log x) ; \tag{3}$$

il est donc bien meilleur que celui de Dirichlet.

Avec la méthode de Dirichlet le domaine est décomposé en 3 parties, avec la méthode de Voronoï en $q + 2$ parties, et ce qu'il y a d'intéressant dans cette dernière méthode est que q croît indéfiniment avec x.

Voronoï s'est rendu compte que sa méthode pouvait être appliquée non seulement dans le problème des diviseurs, mais dans bien d'autres problèmes; on le sait par la fin de l'introduction de son travail:

« Il est aisé de généraliser, dit-il, la méthode exposée dans ce mémoire et de l'appliquer aux recherches des valeurs asymptotiques de différentes sommes multiples. »

---

[1] Nous ne considérerons pas la méthode de Wigert (*Math. Zs.*, 5 (1919), p. 310-318), parce que jusqu'à présent on ne l'a employée que dans le problème du cercle, d'autant plus que l'ordre de l'erreur trouvé par M. Wigert est un peu plus grand que l'ordre trouvé par les autres méthodes.

[2] *J. für Math.*, 126 (1903), p. 241-282.

M. Sierpiński[1] applique la méthode de Voronoï au problème du cercle, et il trouve

$$P(x) = O(\sqrt[3]{x}) , \tag{4}$$

donc un résultat bien meilleur que celui de Gauss.

4. — *La méthode de Piltz.*

C'est M. Piltz qui a trouvé la méthode arithmétique (1881). Comme nous l'avons déjà fait remarquer à propos de la méthode de Dirichlet, il suffit dans le problème des diviseurs de s'occuper de la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) ,$$

où pour abréger on a posé $\psi(v) = v - E(v) - \frac{1}{2}$.

Dirichlet se sert de la borne supérieure triviale $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ pour la valeur absolue de cette somme, mais M. Piltz a remarqué que, si x est grand, les termes négatifs atténuent l'influence des termes positifs. Il décompose l'intervalle $(1, \sqrt{x})$ en intervalles partiels, et il montre qu'en choisissant d'une manière appropriée les points de division, la contribution de chaque intervalle partiel à la somme en question est d'un ordre plus petit que la longueur de l'intervalle, d'où l'on déduit que la valeur absolue de la somme considérée est d'un ordre inférieur à $\sqrt{x}$.

L'idée fondamentale de la méthode de Piltz est donc de réunir beaucoup de termes

$$\psi\left(\frac{x}{t}\right) + \psi\left(\frac{x}{t+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{x}{t+B-1}\right) ,$$

de telle façon que la valeur absolue de cette somme reste cependant relativement petite. Pour cela on doit pouvoir trouver une borne supérieure de cette valeur absolue, ce qui se fait de la façon suivante:

---

[1] *Prace mat. fiz.*, 17 (1906), p. 77-114.

On choisit le nombre positif A ne contenant aucun des facteurs de B tel que la plus grande valeur g de

$$\left|\frac{Bx}{t+h} - \frac{Bx}{t} - Ah\right| ,$$

où h est un des nombres 0, 1, ..., B — 1, soit la plus petite possible. On a alors

$$\left|\frac{x}{t+h} - \frac{x}{t} - \frac{Ah}{B}\right| \leqq \frac{g}{B} .$$

Si g est petit, $\frac{x}{t+h}$ est à peu près égal à $\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}$, donc la somme en question est à peu près égale à

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right) ;$$

plus exactement on a

$$\left|\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t+h}\right) - \sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right)\right| < 4g + 2 . \tag{5}$$

Calculons maintenant la somme

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right) ,$$

c'est-à-dire la somme

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{Ah+c}{B}\right) , \qquad \text{où} \quad c = \frac{Bx}{t} .$$

A chaque nombre entier h dans l'intervalle $0 \leqq h \leqq B - 1$ correspond un nombre entier k dans le même intervalle et tel que la différence

$$Ah + E(c) - k$$

soit divisible par B, et la réciproque est vraie aussi, A ne contenant aucun des facteurs de B. $\psi(t)$ étant une fonction de période 1, on a

$$\psi\left(\frac{Ah+c}{B}\right) = \psi\left(\frac{k+c-E(c)}{B}\right) = \frac{k+c-E(c)}{B} - \frac{1}{2} .$$

puisque la partie entière de $\frac{k + c - E(c)}{B}$ est égale à 0. On a donc

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{Ah + c}{B}\right) = \sum_{k=0}^{B-1}\left(\frac{k + c - E(c)}{B} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{B-1}{2} + c - E(c) - \frac{B}{2} = c - E(c) - \frac{1}{2} ,$$

ce qui est en valeur absolue inférieur à 1. Il s'ensuit donc de (5)

$$\left|\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t+h}\right)\right| < 4g + 3 .$$

C'est sur cette inégalité que repose la méthode de Piltz. Pour une valeur donnée de t on peut choisir A et B tels que le membre de droite de cette dernière inégalité est beaucoup plus petit que B, donc aussi beaucoup plus petit que la longueur de l'intervalle.

M. Piltz n'a jamais publié sa méthode. En 1901 il a écrit deux lettres à M. Landau, pour exposer son procédé et pour démontrer le théorème de Voronoï. Les démonstrations données dans ces lettres, ne sont pas exactes, et ce n'est que depuis quelques années que M. Landau [1] a réussi à en déduire l'approximation de Voronoï. Jusqu'à présent on n'a pu trouver aucun résultat meilleur avec cette méthode, quoique M. Piltz prétendît qu'il pouvait diminuer l'erreur, et la ramener à $O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$, quelque soit le nombre positif ε.

5. — *La méthode de Pfeiffer.*

Le sort de la méthode de Piltz ressemble un peu à celui de la troisième méthode que nous allons exposer, celle de Pfeiffer [2]. L'inventeur a, il est vrai, publié sa méthode (1886); mais son travail manquait tellement de clarté et de précision qu'il est resté sans influence sur le développement de la théorie analytique des nombres, jusqu'à ce que M. Landau [3] en 1912 eût trouvé

---

[1] *Gött. Nachr.* (1920), p. 13-32.
[2] *Jahresbericht der Pfeifferschen Lehr- und Erziehungs-Anstalt zu Jena* (1886).
[3] *Wien. Ber.* (IIa), 121 (1912), p. 2195-2332; 124 (1915), p. 469-505.

l'erreur dans la démonstration et l'eût remise en ordre. Cette méthode est basée sur l'étude des séries de Fourier. On considère l'intégrale

$$\Phi_m = \iint\limits_D \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv\ ,$$

où l'on a posé

$$\varphi_m(u) = 1 + 2\sum_{h=1}^{m} \cos 2h\pi u\ ,$$

et où le domaine D satisfait à des conditions très générales. L'idée fondamentale de la méthode est que, pour m croissant indéfiniment, Φ_m tend vers le nombre des points entiers du domaine D, à condition que les points entiers, situés sur le contour de D, soient comptés d'une façon déterminée; par exemple, si le contour du domaine a une tangente en un point entier, on ne comptera ce point qu'à demi.

Avec la méthode de Pfeiffer, M. Landau démontre les résultats de Voronoï et de Sierpiński, donc (3) et (4) [1]. Dans le problème du cercle il en déduit non seulement une relation contenant le symbole O de Landau, mais encore une relation contenant le symbole Ω de Hardy-Littlewood. Il montre en effet que pour chaque nombre ε positif

$$\mathrm{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}\right)^{2},$$

c'est-à-dire que pour x croissant indéfiniment le quotient

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}$$

ne tend pas vers 0.

Si β ne dépend pas de x, la relation

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right)$$

est valable pour $\beta \geqq \frac{1}{3}$, d'après (4), mais fausse pour $\beta < \frac{1}{4}$.

---

[1] *Annali di Mat.* (Tortolini), Rome (3) 20 (1913), p. 1-28; *Gött. Nachr.* (1915), p. 148-160.
[2] *Wien. Ber.* (IIa) 124 (1915), p. 469-505.

En effet, si la relation était juste pour $\beta < \frac{1}{4}$, on pourrait choisir le nombre positif ε de telle façon que $\beta < \frac{1}{4} - \varepsilon$, et alors $\frac{P(x)}{x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}$ tendrait vers 0 pour x croissant indéfiniment. La limite inférieure de l'exposant β est donc contenue dans l'intervalle $\frac{1}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{1}{3}$. La détermination exacte de la limite inférieure est un des problèmes les plus intéressants de la théorie des nombres, mais on n'y est jusqu'ici pas encore arrivé.

M. Landau [1] applique aussi cette méthode à d'autres problèmes; entre autres il en déduit les approximations analogues pour une ellipse. D'autres applications ont été données par Cauer [2], Hammerstein [3] et moi-même [4].

Comme le fondement de la méthode de Pfeiffer est une identité, on ne doit pas s'étonner de pouvoir en déduire non seulement des approximations, mais aussi des identités. Par exemple, si x est un nombre positif, non entier, on trouve [5]

$$P(x) = \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{\sqrt{n}} J_1\left(2\pi\sqrt{nx}\right) \tag{6}$$

et [6]

$$\Delta(x) = \frac{1}{4} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} L\left(2\pi\sqrt{nx}\right), \tag{7}$$

où $r(n)$ désigne le nombre des solutions entières de $u^2 + v^2 = n$, et l'on a

$$L(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xu \sin \frac{x}{u}\, du = Y_1(2x) - H_1(2x) ;$$

$J_1(x)$ est la première fonction de Bessel de premier ordre, $Y_1(x)$ est la deuxième solution habituelle de l'équation différentielle

---

1 *Wien. Ber.* (IIa) 124 (1915), p. 469-505.
2 Thèse de doctorat (1914), Gœttingue.
3 Thèse de doctorat (1919), Gœttingue.
4 *Nieuw Archief* (2) 13 (1920), p. 125-140.
5 LANDAU. *Gött. Nachr.* (1920), p. 109-134.
6 ROGOSINSKI. Thèse de doctorat (1922), Gœttingue.

de Bessel avec 1 comme paramètre, et $H_1(x)$ est la fonction cylindrique

$$H_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^x \frac{te^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \, .$$

Si x est entier, on doit remplacer dans (6) et (7) $P(x)$ par $P(x) - \frac{1}{2} r(x)$, et $\Delta(x)$ par $\Delta(x) - \frac{1}{2} d(x)$.

Des relations (6) et (7), qui ont été découvertes par Voronoï [1] et Hardy [2], on déduit facilement les relations déjà mentionnées plusieurs fois de Voronoï et de Sierpiński [3].

Comme je l'ai déjà fait remarquer, l'ordre de grandeur exact de $P(x)$ n'est pas connu, d'ailleurs l'ordre de $\Delta(x)$ ne l'est pas non plus. Par contre l'ordre exact des valeurs moyennes des fonctions $(\Delta(t))^2$ et $(P(t))^2$ dans l'intervalle $1 \leqq t \leqq x$ est connu. En effet comme M. Cramér [4] l'a déduit de (6) et (7) (il s'est servi même de deux relations plus simples), on a pour chaque nombre positif ε

$$\int_1^x (\Delta(t))^2 dt = \gamma_1 x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right)$$

et

$$\int_1^x (P(t))^2 dt = \gamma_2 x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right),$$

où γ_1 et γ_2 désignent des nombres positifs constants. La valeur moyenne des carrés des fonctions $\Delta(x)$ et $P(x)$ a donc le même ordre que la fonction $\sqrt{x}$, de sorte que $\frac{\Delta(x)}{\sqrt[4]{x}}$ et $\frac{P(x)}{\sqrt[4]{x}}$ ne tendent pas vers zéro pour x croissant indéfiniment. Nous pouvons donc écrire

$$\Delta(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x}\right) \quad \text{et} \quad P(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x}\right).$$

---

[1] *Ann. de l'Ec. Norm.* (3) 21 (1904), p. 207-268 et p. 459-534; *Verh. III. intern. Math. Kongresses in Heidelberg* (1904), p. 241-245. Cf. HARDY, *Lond. M. S. Proc.* (2) 15 (1916), p. 1-25 et SIERPIŃSKI, *Prace mat.-fiz.*, 18, p. 1-59.

[2] *Quart. J.*, 46 (1915), p. 263-283.

[3] LANDAU, *Gött. Nachr.* (1915), p. 161-171; *Münch. Ber.* (1915), p. 317-328; *Math. Zs.* 5 (1919), p. 319-320.

[4] *Math. Zs.* 15 (1922), p. 201-210.

Si l'on emploie l'inégalité connue de Schwarz

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2 \leqq (b-a)\int_a^b f^2(t)\,dt\ ,$$

où l'on suppose $b \geqq a$, on trouve que la valeur moyenne des fonctions $|\Delta(x)|$ et $|\mathrm{P}(x)|$ est au plus du même ordre que $\sqrt[4]{x}$.

6. — *La méthode de Landau.*

La méthode basée sur l'étude des fonctions de variables complexes s'appuie sur le lien qui existe entre le nombre des points entiers de certains domaines et la convergence de certaines séries de Dirichlet. Nous n'avons à considérer ici que les séries de Dirichlet ordinaires, c'est-à-dire celles du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\ ,$$

les a_n étant des coefficients constants et s une variable complexe.

Si cette série converge en un point s_0, elle converge en chaque point s ayant une partie réelle plus grande. Pour le démontrer, posons

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{F}_k\ , \qquad \mathrm{F}_0 = 0\ ,$$

donc

$$\frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n-1} \qquad (n \geqq 1)\ .$$

Si v et w sont des nombres entiers ($w > v \geqq 1$), on a

$$\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=v}^{w} \frac{\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n-1}}{n^{s-s_0}} = \sum_{n=v}^{w} \frac{\mathrm{F}_n}{n^{s-s_0}} - \sum_{n=v-1}^{w-1} \frac{\mathrm{F}_n}{(n+1)^{s-s_0}}\ ,$$

donc

$$\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=v}^{w-1} \mathrm{F}_n \left(\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right) + \frac{\mathrm{F}_w}{w^{s-s_0}} - \frac{\mathrm{F}_{v-1}}{v^{s-s_0}}\ . \qquad (8)$$

On a

$$\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}} = (s - s_0)\int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s-s_0+1}},$$

donc

$$\left|\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right| \leqq |s - s_0| \cdot \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{p+1}}, \tag{9}$$

p désignant la valeur réelle de $s - s_0$. En vertu de la convergence de la série en question en s_0, le nombre F_n est borné, donc en valeur absolue plus petit qu'un nombre constant A; on a donc d'après (8) et (9)

$$\left|\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s}\right| < A\,|s - s_0| \cdot \int_v^w \frac{du}{u^{p+1}} + \frac{A}{w^p} + \frac{A}{v^p}. \tag{10}$$

Comme p est positif (parce que la partie réelle de s est plus grande que celle de s_0), l'expression finale tend vers 0 pour v croissant indéfiniment, de sorte que la série de Dirichlet en question converge au point s.

Il s'ensuit que pour une série de Dirichlet, on a trois cas possibles: convergence en chaque point, comme par exemple pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{n^s};$$

divergence en chaque point, comme par exemple pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s};$$

ou bien il y a une droite parallèle à l'axe imaginaire telle que la série diverge à sa gauche et converge à sa droite. L'abscisse de cette droite s'appelle l'abscisse de convergence de la série, et il y a une relation simple entre cette abscisse α et l'ordre de grandeur de la fonction

$$S(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq x} a_n,$$

En effet, si $\alpha \geqq 0$, on a pour chaque nombre ε positif

$$S(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon}) ,$$

et inversément, si

$$S(x) = O(x^{\beta}) , \tag{11}$$

l'abscisse α de convergence est $\leqq \beta$. Pour démontrer la première de ces propriétés, nous appliquerons l'inégalité (10) en y posant $s = 0$, $v = 1$, $w = E(x)$, de sorte que le membre de gauche de cette inégalité est égale à la valeur absolue de $S(x)$. Nous devons poser $s_0 = \alpha + \varepsilon$, parce que la série converge en ce point ; alors $p = -(\alpha + \varepsilon)$, donc

$$|S(x)| < A.(\alpha + \varepsilon)\int_1^x u^{\alpha+\varepsilon-1}\,du + Ax^{\alpha+\varepsilon} + A = 2Ax^{\alpha+\varepsilon}.$$

Pour démontrer la seconde propriété, il suffit de montrer que la série de Dirichlet converge pour chaque nombre réel $s > \beta$, c'est-à-dire il suffit de montrer que pour chaque nombre $s = \beta + \varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ le membre de gauche de la relation (8) tend vers 0, si v croît indéfiniment. Posons $s_0 = 0$, donc $p = s - s_0 = \beta + \varepsilon$. Le nombre F_n est égal à $S(n)$ et d'après (11) il existe un nombre constant A tel que la valeur absolue de F_n est inférieure à An^{β} et à $A(n+1)^{\beta}$, donc inférieure à u^{β}, u désignant un nombre quelconque dans l'intervalle $n \leqq u \leqq n+1$.

Il s'ensuit

$$|F_n|.\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{p+1}} < A\int_n^{n+1} u^{\beta}.\frac{du}{u^{\beta+\varepsilon+1}} = A\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{\varepsilon+1}}.$$

D'après (8) et (9) on a

$$\left|\sum_{n=v}^{w}\frac{a_n}{n^s}\right| < A.|\beta+\varepsilon|.\int_v^w\frac{du}{u^{\varepsilon+1}} + \frac{A}{w^{\varepsilon}} + \frac{A}{v^{\varepsilon}},$$

et l'expression finale tend en effet pour chaque nombre positif ε vers 0, si v croît indéfiniment.

De ces considérations on déduit un lien entre nos problèmes et la convergence de certaines séries de Dirichlet. Comme exemple nous prendrons le problème du cercle. Le nombre des points entiers du cercle $u^2 + v^2 = x$ est égal à la somme

$$\sum_{0 \leqq n \leqq x} r(n) ,$$

$r(n)$ désignant le nombre des solutions entières de l'équation $u^2 + v^2 = n$. D'après le résultat de M. Sierpiński la fonction πx représente cette somme avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de $\sqrt[3]{x}$, donc

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} (r(n) - \pi) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right) ,$$

de sorte que la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n) - \pi}{n^s}$$

a une abscisse de convergence $\leqq \frac{1}{3}$. Si nous pouvons démontrer directement ce théorème, nous aurons montré que pour chaque nombre ε positif nous avons la relation

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} (r(n) - \pi) = O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right) ,$$

donc

$$P(x) = \sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} r(n) - \pi x = O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right) .$$

M. Landau[1] a publié en 1912 une méthode au moyen de laquelle on peut trouver une démonstration directe dans ce cas et dans bien d'autres. Cette méthode est applicable pour des domaines à k dimensions pour lesquels la série correspondante de Dirichlet satisfait entre autres à une équation fonctionnelle analogue à celle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Il applique cette

[1] *Gött. Nachr.* (1912), p. 687-771; (1915), p. 209-243; (1917), p. 96-101.

méthode entre autres [1] aux problèmes concernant l'ellipsoïde à k dimensions [2].

La méthode de Landau se sert, il est vrai, de propositions exigeant des connaissances mathématiques assez profondes, mais elle conduit parfois très rapidement au but. Par exemple M. Landau [3] n'a besoin que de 2 pages pour démontrer la proposition de Sierpiński

$$P(x) = O\left(\sqrt[3]{x}\right),$$

tandis que M. Sierpiński [4] a besoin d'environ 40 pages pour la démonstration du même théorème par la méthode de Voronoï.

Un des grands avantages de l'emploi des variables complexes est qu'il conduit non seulement à des résultats contenant le symbole O, mais encore à des résultats contenant Ω.

MM. Landau [5], Hardy [6], Wigert [7] et Cramér [8] ont appliqué la théorie des nombres complexes au problème des diviseurs et à celui du cercle. M. Hardy a montré:

$$P(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x \log x}\right) \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x \log x} \log \log x\right);$$

si α_k désigne la limite inférieure de l'exposant β^k pour lequel la relation

$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\beta_k}\right)$$

est encore juste, on a

$$\frac{1}{4} \leqq \alpha_2 \leqq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \leqq \alpha_3 \leqq \frac{1}{2}, \quad \frac{k-1}{2k} \leqq \alpha_k \leqq \frac{k-2}{k} \qquad (k \geqq 4).$$

En admettant l'hypothèse de Riemann que toutes les racines

[1] *Gött. Nachr.* (1917), p. 102-111 ; *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* (1918), p. 131 ; *Math. Zs.*, 2 (1918), p. 52-154.

[2] *Berl. Ber.* (1915), p. 458-476 ; *Wien. Ber.* (IIa), 124 (1915), p. 445-468.

[3] *Math. Zs.*, 5 (1919), p. 319-320.

[4] *Prace mat. fiz.*, 17 (1906), p. 77-114.

[5] *Batt. G.*, 51 (1913), p. 73-81 ; *Münch. Ber.* (1915), p. 317-328 ; *Gött. Nachr.* (1915), p. 161-171 ; *Math. Zs.*, 5 (1919), p. 319-320.

[6] *Quart. J.*, 46 (1915), p. 263-283 ; *Lond. M. S. Proc.* (2), 15 (1916), p. 1-25 et p. 192-213 ; 18 (1919), p. 201-204.

[7] *Acta Math.*, 37 (1914), p. 113-140. Cf. LANDAU, *Gött. gelehrte Anzeigen*, 177 (195), p. 377-414.

[8] *Ark. för Mat., Astron. och Fys.*, 21 (1922).

complexes de la fonction $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite d'abscisse $\frac{1}{2}$, M. Landau[1] a déduit d'une proposition due à M. Littlewood[2] qu'aucun des nombres $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ etc. ne surpasse $\frac{1}{2}$.

7. — *La méthode de Van der Corput*[3] *et de Vinogradoff*[4].

Finalement nous traiterons une méthode que M. Vinogradoff et moi avons trouvée indépendamment l'un de l'autre. Plus d'un mois après avoir tenu cette conférence, j'ai pour la première fois appris le nom de M. Vinogradoff et les remarques faites dans cet article au sujet des résultats trouvés par lui ont été ajoutées au texte lors de la correction de la première épreuve.

Avant de passer à la méthode, je veux indiquer comment j'y suis arrivé peu à peu par l'étude des méthodes de Voronoï, de Pfeiffer et de Piltz.

Comme nous l'avons déjà dit à propos des méthodes de Dirichlet et de Piltz, nous n'avons dans le problème des diviseurs à nous occuper que de la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right).$$

De même dans le problème du cercle nous n'avons à considérer que la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{\frac{1}{2}x} \\ h \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x-h^2}).$$

---

[1] *Gött. Nachr.* (1912), p. 728.

[2] *C. R.*, 154 (1912), p. 263-266.

[3] Thèse de doctorat (1919), Leiden; *Math. Ann.*, 81 (1920), p. 1-20; *Math. Zs.*, 10 (1921), p. 105-120; *Math. Ann.*, 84 (1921), p. 53-79; 87 (1922), p. 39-65. Un autre article paraîtra bientôt dans les *Math. Ann.* et un autre encore dans la *Math. Zs.* Cf. LANDAU-Van der CORPUT, *Gött. Nachr.* (1920), p. 135-171.

[4] *Journal de la Soc. math. Charkov* (1917); *Bull. de l'Ac. des Sciences de Russie*, Pétrograd (1917), p. 1347-1378; Thèse de doctorat (1920), Pétrograd. Les articles de M. Vinogradoff ont été écrits dans la langue russe.

Pour calculer le nombre des points entiers d'un domaine quelconque, il suffit de calculer la somme

$$\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) \,.$$

$v = f(u)$ ou $u = f(v)$ étant l'équation d'une partie du contour. Jusqu'à ces dernières années la méthode de Pfeiffer était appliquée à peu de problèmes seulement, et la méthode de Voronoï à deux seuls problèmes, celui des diviseurs et celui du cercle, de sorte que dans l'emploi de cette dernière méthode on posait toujours $f(u) = \frac{x}{u}$ ou $f(u) = \sqrt{x - u^2}$. J'ai montré que ces deux méthodes pouvaient être appliquées à chaque fonction $f(u)$ remplissant la condition suivante :

$$C' \left\{ \begin{array}{l} f(u) \text{ est réelle et deux fois dérivable dans l'intervalle} \\ a \leq u \leq b, \ (a + 1 \leq b), \text{ la deuxième dérivée étant uni-} \\ \text{oscillante (c'est-à-dire monotone), toujours positive ou} \\ \text{toujours négative.} \end{array} \right.$$

Les deux méthodes donnent dans ce cas le même résultat, à savoir qu'il y a une constante absolue c telle que l'on ait

$$\left| \sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) \right| < c \left(\int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{3}} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right) . \quad (12)$$

Il est évident que l'on peut maintenant calculer approximativement le nombre des points entiers dans des domaines satisfaisant à des relations très générales. Nous prendrons comme exemple le problème des diviseurs, c'est-à-dire nous approximerons la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) .$$

Nous décomposons cette somme en deux sommes partielles

$$\sum_{\substack{1 \leqq h < \sqrt[3]{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{\sqrt[3]{x} \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) .$$

Puisque $|\psi| \leqq \frac{1}{2}$, la valeur absolue de la première somme partielle est $< \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$. Pour un x suffisamment grand $\sqrt[3]{x} + 1 \leqq \sqrt{x}$, de sorte que la relation C′ est remplie pour $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt{x}$, $f(u) = \frac{x}{u}$. La valeur absolue de la deuxième somme partielle est donc plus petite que

$$c\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt{x}} \left(\frac{2x}{u^3}\right)^{\frac{1}{3}} du + \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{x\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{x}}}\right)$$

$$= c\left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x}\log x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

de sorte que l'erreur dans le problème de diviseurs ne surpasse pas, en effet, l'ordre de la fonction $\sqrt[3]{x}\log x$.

La méthode de Piltz ne donne pas seulement la proposition énoncée, mais encore un résultat plus général. De la méthode de Piltz il suit que l'inégalité (12) est valable non seulement pour la fonction $\psi(v) = v - \mathrm{E}(v) - \frac{1}{2}$, mais encore pour chaque fonction $\psi(v)$ remplissant la condition suivante:

B $\left\{\begin{array}{l} \psi(v) \text{ est réelle et périodique de période 1, unioscillante} \\ \text{dans l'intervalle } 0 < v < 1, \text{ et satisfait à} \\ \\ \qquad |\psi(v)| \leqq 1 \qquad (0 \leqq v \leqq 1)\,, \qquad \int_0^1 \psi(v)\,dv = 0\,. \end{array}\right.$

Si l'on part de cette supposition, il est très facile de saisir le principe de la nouvelle méthode. De la supposition B il découle que $\psi(v)$ est développable dans la série de Fourier suivante

$$\psi(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2m\pi i v}\,, \qquad \text{où} \quad a_0 = 0\,,$$

donc

$$\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) = \sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2m\pi i f(n)}\,,$$

donc

$$\left|\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n))\right| \leqq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m| \cdot \left|\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} e^{2m\pi i f(n)}\right|, \tag{13}$$

étant admis la convergence de la dernière double sommation. Si $f(u)$ satisfait à la condition C′, $mf(u)$ y satisfait également. Si donc de la condition C′ une borne supérieure peut être déduite pour la valeur absolue de la sommation

$$\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} e^{2\pi i f(n)}, \tag{14}$$

on trouve également une borne supérieure pour tous les termes de la sommation dans le membre de droite de (13), de sorte que l'on obtient ainsi une borne supérieure pour le membre de gauche de cette inégalité.

Le problème essentiel réside donc dans la possibilité d'approximer aussi près que possible la somme (14), et c'est grâce à une équation fonctionnelle approximative remarquable que la chose est possible. Puisque $f''(u)$ dans l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ est supposé constamment positif ou constamment négatif, $f'(u)$ est une fonction unioscillante de u. Si A désigne le plus petit et B le plus grand des nombres $f'(a)$ et $f'(b)$, à chaque ν dans l'intervalle $A \leqq \nu \leqq B$ correspond un nombre n_ν univoquement déterminé par les relations $f'(n_\nu) = \nu$, et $a \leqq n_\nu \leqq b$. L'équation fonctionnelle approximative établit que la somme cherchée (14) est donnée avec une très grande approximation par l'expression

$$e^{\pm\frac{\pi i}{4}} \sum_{\substack{A \leqq \nu \leqq B \\ \nu \text{ entier}}} \frac{e^{2\pi i(f(n_\nu) - \nu n_\nu)}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}, \tag{15}$$

où l'on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$, selon que $f''(u)$ dans l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ est constamment positif ou constamment négatif.

Pour approximer la somme (14), il suffit donc de calculer cette dernière expression.

Si nous employons pour la valeur absolue de cette dernière somme la borne supérieure triviale

$$\sum_{\substack{A \leqq \nu \leqq B \\ \nu \text{ entier}}} \frac{1}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}, \tag{16}$$

nous obtenons à peu près la même approximation pour la somme (14), et si nous substituons ce résultat, nous trouvons précisément l'inégalité (12), de sorte que cette méthode fournit le même résultat que la méthode de Piltz. Mais elle peut fournir encore un meilleur résultat. Nous avons employé pour la sommation (15) l'approximation triviale (16). Il se pose maintenant la question suivante: est-il possible de remplacer cette approximation triviale par une meilleure? A cette question il a été répondu affirmativement, tant par M. Vinogradoff que par moi. Je suppose que M. Vinogradoff a développé une propre méthode, tandis que moi j'ai appliqué la méthode de Weyl [1], entre autres dans le cas où $f(u)$ satisfait non seulement à la condition C′, mais encore à la condition suivante:

D — $f(u)$ est dans l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ $k+1$ fois dérivable $(k \geqq 2)$; on a

$$|f'''(u)| \leqq |f''(u)|^{\frac{4}{3}+\eta} \tag{17}$$

$(\eta > 0)$, et dans l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ chaque produit

$$f^{(h_1+2)}(u) \cdot f^{(h_2+2)}(u) \ldots f^{(h_{k-1}+2)}(u) \tag{18}$$

où les $h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}$ désignent des nombres non-négatifs dont la somme égale $k-1$, est en valeur absolue au plus égal à $|f''(u)|^{\frac{5}{3}k-1+\eta}$.

Les conditions C′ et D étant remplies, on peut trouver pour la somme (15), donc aussi pour la somme (14) une meilleure approximation. Dans ce cas on peut remplacer la proposition énoncée

[1] Weyl. *Gött. Nachr.* (1914), p. 234-244; *Math. Ann.*, 77 (1916), p. 313-352 et *Math. Zs.*, 10 (1921), p. 88-101.

par la proposition suivante: Les conditions B, C' et D étant vérifiées, il existe un nombre γ dépendant au plus de k et un nombre positif ω dépendant au plus de k et de η avec la propriété

$$\left|\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n))\right| < \gamma\left(\int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{3}+\omega} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}}\right) \tag{19}$$

L'exposant $\frac{1}{3}$ est donc remplacé par un nombre plus grand.

Avec cette inégalité on peut améliorer tous les résultats en question obtenus jusqu'ici contenant le symbole O de Landau. On trouve par exemple qu'il existe une constante $\Theta < \frac{1}{3}$ telle que dans le problème des diviseurs l'ordre de l'erreur ne surpasse pas celui de x^Θ; j'ai montré qu'on peut prendre même $\Theta < \frac{33}{100}$. Donc dans le problème des diviseurs l'exposant du terme représentant l'ordre de l'erreur est compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{33}{100}$; donc $\frac{1}{4} \leqq a_2 < \frac{33}{100}$.

Comme exemple je prouverai que dans le problème du cercle l'exposant analogue est inférieur à $\frac{1}{3}$. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il suffit de démontrer

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{1}{2}x} \\ n \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x-n^2}) = O(x^\Theta),$$

Θ désignant une constante $< \frac{1}{3}$. Nous appliquerons notre proposition, en posant $a = 1$, $b = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, $f(u) = \sqrt{x-u^2}$. Nous devons supposer $x > 8$, donc $a + 1 \leqq b$; de cette manière la condition C' est remplie. En choisissant x assez grand, la condition D est remplie pour $k = 4$, $\eta = \frac{1}{6}$. En effet, dans l'intervalle $1 \leqq u \leqq \sqrt{\frac{1}{2}x}$, l'ordre de $f''(u)$, $f'''(u)$, $f^{\mathrm{IV}}(u)$, $f^{\mathrm{V}}(u)$ est égal respectivement à celui de $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^2}$. Dans (17) l'ordre du premier membre est donc $\frac{1}{x}$ et celui du second membre

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}},$$

de sorte que, x étant choisi suffisamment grand, le premier membre est plus petit que le second. L'ordre du produit (18) est

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}(h_1+1)+\frac{1}{2}(h_2+1)+\frac{1}{2}(h_3+1)}} = \frac{1}{x^3}$$

à cause de $h_1 + h_2 + h_3 = 3$, de sorte que, x étant choisi suffisamment grand, la valeur absolue de ce produit est plus petite que $|f''(u)|^{\frac{5}{3}\cdot 4-1+\frac{1}{6}}$, dont l'ordre est égal à

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{6}}} = \frac{1}{x^{\frac{35}{12}}}.$$

Les conditions sont ainsi remplies; l'inégalité (19) a donc lieu, et il s'ensuit

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{1}{2}x} \\ n \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x-n^2}) = O\left\{\int_1^{\sqrt{\frac{1}{2}x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{3}+\omega} du + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right\}$$

$$= O\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\omega\right)} + x^{\frac{1}{4}}\right) = O\left(x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\omega} + x^{\frac{1}{4}}\right).$$

Dans le problème du cercle l'ordre de l'erreur ne surpasse pas celui de x^Θ, Θ désignant le plus grand des deux nombres $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\omega$ et $\frac{1}{4}$ $\left(\text{donc } \Theta < \frac{1}{3}\right)$.

Nous sommes arrivés au terme de notre exposé. Le choix entre les différentes méthodes dont nous venons de parler dépend dans chaque cas particulier du problème posé et du degré d'exactitude demandé. Si une première approximation est suffisante, on peut se contenter de la méthode de Gauss ou de celle de Dirichlet. Pour les approximations contenant Ω et aussi dans les problèmes concernant des domaines à k dimensions, l'emploi des variables complexes est préférable; jusqu'ici en effet dans les questions de cette nature la méthode de Pfeiffer n'est appliquée qu'à des cas particuliers, et les autres pas du tout. La méthode de Van der Corput et de Vinogradoff n'est encore qu'à son stade initial et elle sera en tout cas encore applicable à beaucoup d'autres problèmes. Je suis persuadé qu'elle est encore susceptible d'amélioration. J'ai en effet l'impression que la méthode de Weyl, appliquée à la somme (15), ne donne pas la dernière approximation possible, qu'au contraire, la valeur absolue de (15) est beaucoup plus petite que la borne trouvée avec la méthode de Weyl. Et chaque amélioration de l'approximation de cette somme donne une amélioration du résultat final.

D'après une communication qu'il a faite par écrit, M. Vinogradoff a démontré que dans le problème des diviseurs la limite inférieure de l'exposant dans le terme de l'erreur est $\leqq \frac{5}{16}$ et il n'est pas impossible que sous peu il sera démontré que cette limite inférieure est égale à $\frac{1}{4}$.