1. — La méthode de Gauss.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KUNDIG

MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE CALCUL DU NOMBRE DES POINTS A COORDONNÉES ENTIÈRES [1]

PAR

J. G. VAN DER CORPUT (Fribourg, Suisse et Groningue).

---

1. — *La méthode de Gauss.*

Dans les écrits laissés par Gauss [2] on trouva les fragments de deux articles qu'il avait l'intention de remettre à la Société des sciences de Göttingue dans les années 1834 et 1837, mais qu'il n'a pas achevés. Dans ces fragments Gauss déterminait au moyen des points à coordonnées entières l'aire d'une figure, et spécialement d'un cercle dont le centre coincide avec l'origine des coordonnées. Si le rayon est égal à 10, $10\sqrt{10}$, 100 ou $100\sqrt{10}$, Gauss a calculé que le cercle contient

$$317 \; , \qquad 3149 \; , \qquad 31\,417 \qquad \text{ou} \qquad 314\,197$$

points entiers (c'est-à-dire points à coordonnées entières), tandis que l'aire du cercle, à une demi-unité près, a pour valeur

$$314 \; , \qquad 3142 \; , \qquad 31\,416 \qquad \text{ou} \qquad 314\,159 \; ,$$

de sorte que la différence est relativement petite. Dans cet article, lorsque nous parlerons des points entiers d'une figure, nous voulons parler des points à coordonnées entières situés à l'intérieur et sur le contour de cette figure.

---

[1] Conférence donnée à la première Réunion mathématique des Universités de la Suisse romande, à Genève, le 17 février 1923, par M. J. G. van der Corput, professeur à l'Université de Fribourg (Suisse). — Depuis le semestre d'été 1923 M. van der Corput occupe l'une des chaires de mathématiques de l'Université de Groningue. *Réd.*

[2] *Werke*, II, p. 269-291.

Nous pouvons nous attendre à ce que le nombre des points entiers d'une figure soit approximativement égal à l'aire de cette figure. Etant supposé que le contour de la figure a une longueur déterminée l, Gauss démontre que la différence entre ces deux quantités est comprise entre $-4(l+1)$ et $4(l+1)$. La démonstration qu'il en a donnée est la suivante:

Soit r le nombre des carrés tels que leur centre ait des coordonnées entières, leurs côtés aient l'unité pour longueur, et à l'intérieur desquels se trouve au moins un point du contour. Le nombre des points entiers de la figure est plus petit que l'aire de la figure augmentée de r, mais plus grand que cette aire, diminuée de r, de sorte que la différence entre le nombre des points entiers et l'aire de la figure est comprise entre $-r$ et r. Une portion du contour qui appartient à plus de quatre carrés différents contient au moins deux points distants de plus d'une unité. Si donc r est plus grand que $4n$, n étant entier, il y a sur le contour $n+1$ points tels que la distance entre deux points consécutifs est plus grande que 1. Alors la longueur du contour est plus grande que n, et comme nous pouvons choisir $4(n+1)$ plus grand ou égal à r, r est plus petit que $4(l+1)$, et la proposition de Gauss est démontrée.

Nous pouvons considérer comme cas particulier celui du cercle $u^2+v^2=x$, u et v étant des coordonnées rectangulaires. Soit $\mathrm{P}(x)$ la différence entre le nombre des points entiers du cercle et son aire. En vertu de la proposition de Gauss la valeur absolue de $\mathrm{P}(x)$ est plus petite que $4(2\pi\sqrt{x}+1)$. $\mathrm{P}(x)$ est donc au plus du même ordre que la fonction $\sqrt{x}$, ce que l'on écrit

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{O}(\sqrt{x}) \;,$$

O désignant le symbole connu de Landau.

Nous allons traiter maintenant un autre problème, celui des diviseurs. Le nombre $d(n)$ des diviseurs du nombre entier positif n ne peut pas être représenté approximativement par une fonction simple. Par contre on peut trouver une expression simple pour représenter

$$\mathrm{D}(x) = \sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} d(n) \cdot$$

d'une manière approchée. En effet, sur l'hyperbole équilatère $uv = n$ se trouvent exactement $d(n)$ points entiers, car à chaque diviseur δ de n correspond un point à coordonnées entières δ et $\frac{n}{\delta}$ et réciproquement. La fonction $\mathrm{D}(x)$ est donc égale au nombre des points entiers situés sur l'une des hyperboles $uv = 1, 2, ..., \mathrm{E}(x)$, $\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière de x. Tous ces points se trouvent dans le domaine D_1 limité par l'hyperbole $uv = x$ et par les deux droites $u = 1$, $v = 1$, et réciproquement tout point entier contenu dans ce domaine se trouve sur l'une de ces hyperboles. La fonction $\mathrm{D}(x)$ est donc égale au nombre des points entiers du domaine D_1. L'aire de ce domaine est égale à

$$\int_1^x \left(\frac{x}{u} - 1\right) du = x \log x - x + 1 \ ,$$

et le contour a une longueur plus petite que $4x$, de sorte qu'en vertu de la proposition de Gauss

$$\mathrm{D}(x) - (x \log x - x + 1)$$

est contenu entre $-4(4x+1)$ et $4(4x+1)$; la fonction $x \log x$ représente donc $\mathrm{D}(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de x, donc

$$\mathrm{D}(x) = x \log x + \mathrm{O}(x) \ . \tag{1}$$

2. — *La méthode de Dirichlet.*

Dirichlet[1] a réussi à améliorer considérablement ce résultat de la manière suivante:

Par le point $(\sqrt{x}, \sqrt{x})$, qui se trouve sur l'hyperbole équilatère on construit une parallèle à l'axe des u et une parallèle à l'axe des v, de sorte que le domaine D_1 en question est divisé en trois parties. Une de ces parties est un carré, et l'on peut immédiatement calculer le nombre des points entiers qui y sont contenus. Les deux autres parties contiennent le même nombre de points entiers par raison de symétrie, et comme on connaît le nombre

[1] *Berl. Abh.* (1849), p. 69-83; *Werke*, II, p. 49-66.