§4. — Les deux tangentiels d'un point de la courbe.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

miner celles où l'on a: $g_3 < 0$; alors les points doubles sont réels.

Si g_2 est positif, la quartique est bicrunodale et rencontre l'axe des x en quatre points réels et distincts (fig. 4); mais si g_2 est négatif — ce qui ne peut jamais avoir lieu dans le cas d'un discriminant positif — la quartique est biacnodale (fig. 6) et ne rencontre l'axe des x en aucun point réel (H., p. 109); si g_2 est nul (fig. 9), la quartique est bicuspidale, et rencontre l'axe des x en ses deux points doubles.

17. Aux figures nous avons joint un tableau renfermant l'énumération de tous les cas possibles: il y en a treize. Les numéros de la dernière colonne correspondent aux figures.

Sur ces figures, nous avons indiqué par $+$ ou par $-$ le signe de la valeur réelle de pu. Ces différents signes peuvent se déterminer par le moyen de la formule (18).

Les trois dernières figures représentent des quartiques unicursales; elles correspondent à la dégénérescence des fonctions elliptiques.

18. Les relations (3) du début de notre article constituent les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la quartique soient collinéaires. On a coupé cette courbe par la droite

$$A + Bx + Cy = 0 .$$

Ce qui complique beaucoup la théorie de la quartique binodale, et du reste la théorie de la quartique générale, relativement à celle de la cubique plane, c'est précisément ce fait qu'entre les paramètres déterminateurs de quatre points collinéaires, il doit exister deux relations différentes.

Le premier problème que nous avons résolu [3] peut s'énoncer comme il suit: on joint deux points de la courbe et l'on se propose de déterminer les deux autres points où la droite obtenue rencontre la quartique.

§ 4. — *Les deux tangentiels d'un point de la courbe.*

19. La tangente en un point u de la quartique rencontre la courbe en deux autres points (v, w) que nous-même avons

appelés les *tangentiels* du point de contact. (Marcel WINANTS, *Interséquants et tangentiels*, Bulletins de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, 3 mars 1923, pp. 107–115). Nous nous proposons de calculer v, w, connaissant u.

Ce problème peut être envisagé comme un cas limité de celui que nous signalions tout à la fin du paragraphe précédent.

L'hypothèse $u_1 = u_2 = u$ rend l'équation (6) indéterminée, mais on pourrait lever cette indétermination par le moyen de la règle de L'Hospital.

20. Cependant nous allons employer une tout autre méthode: nous égalerons les coefficients angulaires de la tangente en u et de la droite uv:

$$\frac{p'''u}{p''u} = \frac{p''v - p''u}{p'v - p'u} . \tag{24}$$

Cette équation en v admet comme racines les arguments inconnus v, w. Isolons $p'v$, puis élevons au carré; exprimons p'^2v et $p''v$ en fonction de pv. Faisons disparaître aussi p'^2u et $p''u$. On obtient finalement l'équation:

$$\begin{aligned}
&\left(36p^4u - 6g_2 \cdot p^2u + \frac{1}{4}g_2^2\right) \cdot p^4v \\
&- (64p^5u - 16g_2 \cdot p^3u - 16g_3 \cdot p^2u) \cdot p^3v \\
&+ \left(24p^6u - 20g_2 \cdot p^4u - 24g_3 \cdot p^3u + \frac{3}{2}g_2^2 \cdot p^2u + 2g_2 \cdot g_3 \cdot pu\right) \cdot p^2v \\
&+ (16g_2 \cdot p^5u - 4g_2^2 \cdot p^3u - 4g_2 \cdot g_3 \cdot p^2u) \cdot pv \\
&+ 4p^8u - 6g_2 \cdot p^6u + 8g_3 \cdot p^5u + \frac{9}{4}g_2^2 \cdot p^4u + 2g_2 \cdot g_3 p^3u = 0 .
\end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation doit être divisible par

$$(pv - pu)^2 ;$$

il l'est effectivement. Voici ce que l'on trouve pour quotient:

$$\begin{aligned}
&\left(36p^4u - 6g_2 \cdot p^2u + \frac{1}{4}g_2^2\right) \cdot p^2v \\
&+ \left(8p^5u + 4g_2 \cdot p^3u + 16g_3 \cdot p^2u + \frac{1}{2}g_2^2 \cdot pu\right) \cdot pv \\
&+ 4p^6u - 6g_2 \cdot p^4u + 8g_3 \cdot p^3u + \frac{9}{4}g_2^2 \cdot p^2u + 2g_2 \cdot g_3 \cdot pu = 0 .
\end{aligned} \tag{25}$$

Cette équation (25) est ce que deviendrait l'équation (6) si l'on y introduisait l'hypothèse $u_1 = u_2 = u$ et qu'on levât l'indétermination résultante en recourant à la règle de L'Hospital.

21. L'équation (25) fournit, pour $p v$, deux valeurs à chacune desquelles l'équation (24) fait correspondre une et une seule valeur de $p' v$.

Le problème de la détermination des tangentiels se trouve ainsi complètement résolu.

22. Pour qu'un certain point u soit un point d'inflexion, il faut que l'un de ses deux tangentiels coïncide avec lui. L'équation (25) en $p v$ doit admettre la racine $p v = p u$. Remplaçons-y donc $p v$ par $p u$, et nous obtenons une équation du sixième degré relativement à $p u$. Mais l'axe des y est un axe de symétrie. La quartique étudiée possède ainsi douze points inflexionnels, et c'est encore une fois conforme à la théorie des nombres de Plücker.

23. Soit u l'un des points de contact d'une bitangente. L'équation (25) en $p v$ doit avoir ses deux racines égales, condition que l'on réalisera par l'annulation du discriminant de cette équation. Nous obtenons de la sorte une équation du dixième degré par rapport à $p u$.

Seulement les formules de Plücker *indiquent huit bitangentes et non pas dix. Ici nous nous trouvons en présence d'une difficulté que nous n'avons pas su résoudre. Nous serions particulièrement heureux si quelque lecteur de l'*Enseignement mathématique *pouvait nous apporter la clef de cette énigme.*

A titre de vérification nous ferons cependant observer que l'équation du dixième degré dont il vient d'être question, a son premier membre divisible par $p u$. Et nous savons bien [10] que l'égalité $p u = 0$ convient aux deux points de contact d'une certaine bitangente.

24. Une méthode absolument différente pourrait nous fournir les résultats obtenus aux deux numéros précédents. Il suffira que nous nous servions convenablement des formules (1, 9, 10). Les calculs sont malheureusement fort longs, et la discussion des résultats trouvés nous paraît très ardue. Aussi nous contenterons-nous de donner quelques indications sommaires relativement à cette nouvelle méthode.

Dans la formule (1) introduisons l'hypothèse

$$u_1 = u_2 = u \ , \qquad u_3 = u_4 = v \ ;$$

il viendra:

$$2u \equiv -2v \ ,$$

pour les deux contacts d'une bitangente, et par conséquent:

$$p2u = p2v \ ,$$

ou (H., p. 95):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p^4 u + \frac{1}{2} g_2 \cdot p^2 u + 2g_3 \cdot pu + \frac{1}{16} \cdot g_2^2}{4p^3 u - g_2 \cdot pu - g_3} \\ = &\frac{p^4 v + \frac{1}{2} g_2 \cdot p^2 v + 2g_3 \cdot pv + \frac{1}{16} \cdot g_2^2}{4p^3 v - g_2 \cdot pv - g_3} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

La relation (9) devient de même:

$$(pu + pv)\left(pu \cdot pv + \frac{1}{4} g_2\right) = 0 \ ,$$

et se décompose en deux autres:

$$pv = -pu \ , \qquad \text{ou} \qquad pv = -\frac{g_2}{4pu} \ . \qquad (27)$$

On transporte chacune de ces valeurs de pv, soit dans l'équation (10) modifiée par l'hypthèse actuelle, soit dans l'équation (26). Les calculs sont extraordinairement compliqués.

La fonction pu ne prend, le long de la courbe, que des valeurs réelles [9]; d'autre part, dans le cas d'un discriminant positif, l'invariant g_2 lui-même est nécessairement positif [16]; les formules (27) montrent alors que pour toute bitangente la fonction pu est nulle ou négative en l'un des points de contact; donc [14], dans le cas de la quartique bipartite, n'importe quelle bitangente réelle touche l'ovale au moins une fois (fig. 1, 2, 3).

25. Dans notre article *Interséquants et tangentiels* (loc. cit., p. 108), nous avons démontré que *si quatre points d'une quartique sont collinéaires, leurs huit tangentiels appartiennent à une même conique*. Nous aurions voulu déduire cette propriété, pour le cas particulier des quartiques binodales, de leur représentation para-

métrique au moyen des fonctions elliptiques. Malheureusement les calculs sont si extraordinairement laborieux qu'il nous faut y renoncer, pour le moment tout au moins.

CONCLUSION. — A part les quelques difficultés que nous avons signalées dans les trois derniers numéros, nous voyons toutes les propriétés importantes de la courbe découler, presque automatiquement, de la représentation paramétrique adoptée.

Mais en dehors de son intérêt possible pour la géométrie algébrique, le présent article pourrait être envisagé comme un simple exercice d'analyse: la représentation graphique de la relation qui lie entre elles, dans le domaine réel des applications, les deux premières dérivées de la fonction elliptique fondamentale.

Enfin nous avons interprété, sur un même dessin, les zéros de la fonction pu et de ses deux premières dérivées (et même de la troisième puisque l'on a: $p''' = 12\, p \, . \, p'$).

Liége (Université), le 5 novembre 1923.

SUR L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

PAR

l'Abbé LAINÉ (Angers).

---

1. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{2} y'' + (ax + b) y' + \lambda y = 0 \; . \qquad (1)$$

Pour simplifier, nous poserons

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 2\mathrm{X} \; .$$

Dérivons n fois l'équation (1); nous aurons

$$\mathrm{X} y^{(n+2)} + [(a + n\alpha)x + b + n\beta] y^{(n+1)} + \left[na + \lambda + \frac{n(n-1)}{2}\alpha \right] y^{(n)} = 0 \; .$$