DÉMONSTRATION DU PROBLÈME DU SCRUTIN PAR DES CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES

Autor(en): **Aebly, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19738

DÉMONSTRATION DU PROBLÈME DU SCRUTIN PAR DES CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR

J. Aebly (Zurich).

Le problème est le suivant: Deux candidats, A et B, sont en présence; un électeur bien informé sait à l'avance que A aura m voix, B n voix, m étant plus grand que n. On demande la probabilité pour que A garde la majorité pendant tout le dépouillement du scrutin.

Poincaré donne, dans son Calcul des Probabilités, une solution élégante du problème dû à D. André, qui cependant est assez longue (p. 45–49). Etant arrivé par des considérations géométriques à une solution plus courte, quoique non moins rigoureuse du problème, je vais l'exposer dans ce qui suit.

Faisons correspondre à la totalité des cas possibles du dépouillement du scrutin un rectangle dont les côtés ont pour longueur $(m + 1)$ et $(n + 1)$ unités respectivement, que nous partagerons en $(m + 1)(n + 1)$ carrés par des parallèles aux côtés du rectangle. Chaque carré sera représenté par un double indice (i, k) dont le premier terme indique la ligne, le second la colonne auxquelles appartient le carré considéré, les rangs limites étant (0,0) et (n, m).

Imaginons un mobile devant passer de (0,0) à (n, m) par un chemin quelconque satisfaisant à la condition suivante: le passage d'un carré à l'autre ne peut se faire que de deux manières, soit au carré situé au dessous, soit au carré situé à droite, c'est-à-dire que les seules possibilités admises de changement soient de (i, k) à $(i + 1, k)$ ou à $(i, k + 1)$. Le carré (i, k) pourra alors être regardé comme représentant l'ensemble des chemins menant de (0,0) à (i, k), c'est-à-dire l'ensemble des dépouillements ayant amené i bulletins B et k bulletins A.

Ces conventions établies, nous allons procéder à la solution du problème. L'ensemble des cas étant représenté par (n, m) est égal à $\binom{m+n}{n}$. Les cas favorables sont représentés par l'ensemble des chemins ne touchant pas les carrés dont les deux indices ont le même numéro comme (i, i). Comme (i, i) ne peut être abordé que par deux carrés en raison du principe établi, et puisque il y a symétrie complète par rapport à la diagonale passant de (0,0) à (n, n) par les carrés tel que (i,i), il s'ensuit qu'à chaque chemin venant d'un côté, il correspondra un et un seul chemin venant de l'autre côté. L'un des groupes pouvant être considéré comme partant de (1, 0), l'autre de (0, 1).

Le premier représente l'ensemble des cas où A perd la majorité au premier coup et l'autre les cas où A a d'abord la majorité mais la perd à (i,i). B devant nécessairement perdre la majorité, les chemins partant de (1,0) doivent nécessairement passer par un des carrés (i,i). Il suffit de considérer le premier passage pour les chemins émanant de (0,1). Les deux groupes comprennent donc bien la totalité des cas défavorables. Leur nombre étant $2\binom{m+n-1}{m}$, la probabilité demandée est donc

$$1 - 2\frac{\binom{m+n-1}{m}}{\binom{m+n}{m}} = 1 - \frac{2n}{m+n}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{m-n}{m+n}.$$