2. — La méthode de Dirichlet.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

d'une manière approchée. En effet, sur l'hyperbole équilatère $uv = n$ se trouvent exactement $d(n)$ points entiers, car à chaque diviseur δ de n correspond un point à coordonnées entières δ et $\frac{n}{\delta}$ et réciproquement. La fonction $D(x)$ est donc égale au nombre des points entiers situés sur l'une des hyperboles $uv = 1, 2, \ldots, E(x)$, $E(x)$ désignant la partie entière de x. Tous ces points se trouvent dans le domaine D_1 limité par l'hyperbole $uv = x$ et par les deux droites $u = 1$, $v = 1$, et réciproquement tout point entier contenu dans ce domaine se trouve sur l'une de ces hyperboles. La fonction $D(x)$ est donc égale au nombre des points entiers du domaine D_1. L'aire de ce domaine est égale à

$$\int_1^x \left(\frac{x}{u} - 1\right) du = x \log x - x + 1 \;,$$

et le contour a une longueur plus petite que $4x$, de sorte qu'en vertu de la proposition de Gauss

$$D(x) - (x \log x - x + 1)$$

est contenu entre $-4(4x + 1)$ et $4(4x + 1)$; la fonction $x \log x$ représente donc $D(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de x, donc

$$D(x) = x \log x + O(x) \;. \tag{1}$$

2. — *La méthode de Dirichlet.*

Dirichlet[1] a réussi à améliorer considérablement ce résultat de la manière suivante:

Par le point $(\sqrt{x}, \sqrt{x})$, qui se trouve sur l'hyperbole équilatère on construit une parallèle à l'axe des u et une parallèle à l'axe des v, de sorte que le domaine D_1 en question est divisé en trois parties. Une de ces parties est un carré, et l'on peut immédiatement calculer le nombre des points entiers qui y sont contenus. Les deux autres parties contiennent le même nombre de points entiers par raison de symétrie, et comme on connaît le nombre

[1] *Berl. Abh.* (1849), p. 69-83; *Werke*, II, p. 49-66.

des points entiers du carré, il ne reste donc à calculer que le nombre des points entiers du domaine D_2 limité par l'hyperbole équilatère $uv = x$ et par les trois droites $v = 1$, $u = 1$, $u = \sqrt{x}$. Les points entiers de D_2 se trouvent tous sur l'une des droites $u = 1, 2, \ldots, E(\sqrt{x})$, et la droite $u = h$ contient dans D_2 exactement $E\left(\frac{x}{h}\right)$ points entiers, de sorte que D_2 contient

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} E\left(\frac{x}{h}\right)$$

points entiers. Pour calculer approximativement $D(x)$, il suffit donc d'évaluer cette somme. Comme on peut calculer la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2}\right)$$

au moyen de la formule sommatoire d'Euler avec le degré d'exactitude voulu, on n'a qu'à évaluer la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \left(\frac{x}{h} - E\left(\frac{x}{h}\right) - \frac{1}{2}\right) .$$

Comme chaque terme est en valeur absolue $\leq \frac{1}{2}$, la valeur absolue de la dernière somme est $\leq \frac{1}{2}\sqrt{x}$, de sorte que l'on trouve la valeur de $D(x)$ avec une erreur qui est au plus du même ordre que $\sqrt{x}$. Si l'on pose

$$\Delta(x) = D(x) - x(\log x + 2C - 1) ,$$

C désignant la constante d'Euler, le résultat trouvé par Dirichlet est que l'ordre de $\Delta(x)$ ne surpasse pas celui de $\sqrt{x}$, donc

$$\Delta(x) = O(\sqrt{x}) . \tag{2}$$

Il est facile de généraliser ce que nous venons de dire pour l'appliquer à un domaine à k dimensions. Alors on remplacera la figure $u \geq 1$, $v \geq 1$, $uv \leq x$ par le domaine

$$u_1 \geq 1 , \quad u_2 \geq 1 , \ldots , \quad u_k \geq 1 , \quad u_1 u_2 \ldots u_k \leq x ,$$

et $d(n)$ par le nombre $d_k(n)$ des décompositions de n en produit de k facteurs; par exemple $d_4(4) = 10$, parce que 4 peut être décomposé de 4 manières différentes en produit des 4 facteurs 4, 1, 1, 1 et de 6 manières différentes en produit des 4 facteurs 2, 2, 1, 1. Comme M. Piltz[1] l'a montré, on peut donner à la fonction

$$D_k(x) = \sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} d_k(n)$$

la forme suivante

$$D_k(x) = x \sum_{h=0}^{k-1} b_{k,h} (\log x)^h + \Delta_k(x) ,$$

où les coefficients $b_{k,h}$ ne dépendent pas de x, et où

$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{k}} (\log x)^{k-2}\right) .$$

Le résultat donné par la formule (2) est naturellement bien meilleur que celui donné par la formule (1). Cependant Dirichlet a réussi à améliorer encore son propre résultat, comme on le sait par une lettre qu'il écrivit à Kronecker peu avant sa mort[2]:

« Seit unserm neulichen Gespräch auf der Fahrt von Ilsenburg nach Harzburg ist es mir gelungen, die Funktion D(x), die ich bisher nur mit einem Fehler der Ordnung $\sqrt{x}$ angeben konnte, bedeutend in die Enge zu treiben. Die Auffindung des hiezu dienenden Mittels, welches aller Wahrscheinlichkeit nach auch auf die folgenden Fälle anwendbar seyn wird, macht mir zwar grosses Vergnügen, kommt mir aber in sofern zu ungelegener Zeit als ich dadurch von der Vollendung der hydrodynamischen Abhandlung abgezogen werde, welche doch endlich fertig werden muss. »

Quel résultat Dirichlet a-t-il trouvé et quelle méthode a-t-il employée, nous ne le savons pas et probablement nous ne le saurons jamais, parce que c'est un des secrets que Dirichlet enlevé en pleine activité, a emporté avec lui. C'est d'autant plus

---

[1] Thèse de doctorat (1881), Berlin.

[2] Lejeune-Dirichlet, *Werke*, II, p. 407. Dirichlet emploie une autre notation pour la fonction D(x).

difficile de savoir quelle méthode il a employée, que nous connaissons déjà cinq méthodes générales pour améliorer les résultats précédents, une méthode géométrique, une méthode arithmétique et trois méthodes analytiques, dont une découle de l'étude des variables complexes et les deux autres de l'étude des variables réelles [1].

3. — *La méthode de Voronoï.*

C'est Voronoï [2] qui a découvert la méthode géométrique (1903). Comme Dirichlet, il décompose le domaine D_1, mais il le fait d'une autre manière. Il construit q tangentes à l'hyperbole équilatère $uv = x$, de sorte que le domaine est décomposé en un polygone (de $q + 2$ côtés) et en $q + 1$ segments. Il calcule approximativement le nombre des points entiers de chacun de ces domaines; les points entiers qui pourraient se trouver sur l'une des tangentes, sont comptés ou avec le polygone ou avec l'un des segments. Il choisit le nombre q et la direction des tangentes tels que l'erreur soit la plus petite possible. Son résultat est

$$\Delta(x) = O(\sqrt[3]{x} \log x) \; ; \qquad (3)$$

il est donc bien meilleur que celui de Dirichlet.

Avec la méthode de Dirichlet le domaine est décomposé en 3 parties, avec la méthode de Voronoï en $q + 2$ parties, et ce qu'il y a d'intéressant dans cette dernière méthode est que q croît indéfiniment avec x.

Voronoï s'est rendu compte que sa méthode pouvait être appliquée non seulement dans le problème des diviseurs, mais dans bien d'autres problèmes; on le sait par la fin de l'introduction de son travail:

« Il est aisé de généraliser, dit-il, la méthode exposée dans ce mémoire et de l'appliquer aux recherches des valeurs asymptotiques de différentes sommes multiples. »

---

[1] Nous ne considérerons pas la méthode de Wigert (*Math. Zs.*, 5 (1919), p. 310-318), parce que jusqu'à présent on ne l'a employée que dans le problème du cercle, d'autant plus que l'ordre de l'erreur trouvé par M. Wigert est un peu plus grand que l'ordre trouvé par les autres méthodes.

[2] *J. für Math.*, 126 (1903), p. 241-282.