IV

encore les opérations du groupe qui sont un principe d'organisation, mais uniquement de proche en proche. C'est précisément en analysant ce que cette organisation a d'incomplet que nous allons arriver au rôle tout à fait nouveau que va jouer encore la notion de groupe dans les géométries nouvelles.

IV

Prenons par exemple un espace de Riemann et considérons dans cet espace un contour fermé partant d'un point A. Développons de proche en proche, sur l'espace euclidien tangent en A, l'espace euclidien tangent aux différents points du contour. Le petit morceau d'espace qui entoure le point A prendra, suivant qu'on considère ce point comme point de départ ou point d'arrivée, deux positions différentes dans l'espace sur lequel se fait le développement, et on passera de la position finale à la position initiale par un certain déplacement euclidien, que nous dirons *associé* au contour fermé; c'est un déplacement, répétons-le, qui opère dans l'espace euclidien tangent en A; bien qu'il ait été défini par ses effets sur le point A et son voisinage, on peut évidemment l'appliquer à n'importe quelle figure (F) tracée dans l'espace euclidien tangent en A.

Considérons maintenant les différents contours fermés partant d'un point donné A. *Les différents déplacements euclidiens qui leur sont associés forment un groupe.*

Soient en effet deux contours fermés (C_1) et (C_2) partant de A. Soient D_1 et D_2 les déplacements qui leur sont associés; soit enfin (C) le contour fermé obtenu en décrivant successivement (C_1) et (C_2), et D le déplacement associé à (C). Une figure (F) tracée dans l'espace euclidien tangent en A prendra respectivement, après développement du contour (C_1) ou du contour (C_2), la position (F_1) ou la position (F_2); après développement du contour total (C), elle prendra une position (F') placée par rapport à (F_1) comme (F_2) est placée par rapport à (F); autrement dit le déplacement D qui amène (F') en (F) est la résultante du déplacement D_2 qui amène (F') en (F_1) et du déplacement D_1 qui amène (F_1) en (F). La relation

$$D = D_2 D_1$$

qui vient d'être obtenue montre bien que l'ensemble des déplacements associés aux contours fermés issus de A forme un groupe g.

Que se passerait-il si, au lieu du point A, on considérait un autre point A′ ? Imaginons qu'on relie ces deux points par un chemin arbitraire, mais donné ABA′; on peut raccorder de proche en proche, par ce chemin, l'espace euclidien tangent en A′ à l'espace euclidien tangent à A. Dans cet espace euclidien unique il est facile de voir que le groupe g' associé à A′ est *identique* au groupe g associé à A. Soit en effet (C) un contour fermé partant de A, et (C′) le contour fermé A′BA(C)ABA′; soient respectivement D et D′ les déplacements qui leur sont associés. Soit (F) une figure quelconque de l'espace euclidien tangent en A, (F_1) la position qu'elle prend après développement du contour (C). Les figures (F) et (F_1) peuvent être respectivement regardées comme résultant de deux figures (F′) et (F'_1) de l'espace euclidien tangent en A′ par le raccord fait le long du chemin A′BA. Par développement du contour fermé (C′), il est bien évident que la figure (F′) vient en (F'_1); les déplacements D et D′ sont donc identiques. A tout déplacement de g correspond donc un déplacement identique de g' et réciproquement.

En définitive, à l'espace de Riemann donné est associé un sous-groupe g déterminé du groupe G des déplacements euclidiens, sous-groupe qui peut se confondre avec le groupe G lui-même, mais qui peut aussi se réduire à la transformation identique; dans ce dernier cas il est bien évident que l'espace de Riemann est complètement holonome et ne diffère qu'en apparence de l'espace euclidien proprement dit. Il est naturel de donner au groupe g le nom de « groupe d'holonomie » de l'espace de Riemann.

Plus généralement, à tout espace non holonome de groupe fondamental G est associé un sous-groupe g de G qui est son groupe d'holonomie et qui ne se réduit à la transformation identique que si l'espace est parfaitement holonome.

Le groupe d'holonomie d'un espace mesure en quelque sorte le degré de non holonomie de cet espace, de même que le groupe de Galois d'une équation algébrique mesure en quelque sorte le degré d'irrationalité des racines de cette équation.