X. — L'Identité de Bianchi.

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

d'une région R_1 de l'espace-temps on observe de telles variations dans une autre région R_2 il est vain de croire qu'en se transportant dans R_2 on observera de près une vie déformée plus ou moins étrangement. C'est exactement comme si, observant un paysage éloigné, où arbres et personnages semblent très diminués du fait de l'éloignement, on s'imaginait découvrir quelque royaume de Lilliput que l'on pourrait repérer et aller visiter pour s'émerveiller sur place du caractère lilliputien des êtres et des choses.

Les propriétés apparentes d'espaces à ds^2 quelconques sont ainsi généralement comparables aux divers aspects d'un objet pour des observateurs diversement placés. Que de brochures ont été écrites, que de conférences ont été faites qui trahissaient simplement l'incompréhension de choses aussi simples !

X. — L'Identité de Bianchi.

Nous avons vu que, dans les formules stokiennes, les dérivations en ∂ pouvaient être remplacées par d'autres, plus générales, en D, dérivations s'appliquant d'ailleurs à des expressions à indices multiples supérieurs et inférieurs et ce suivant le schème

$$\frac{D}{Dx_i} A^{***}_{****} = \frac{\partial}{\partial x_i} A^{***}_{****} \begin{cases} - \Gamma^{\alpha}_{\mu i} A^{***}_{*\alpha**} & \text{pour chaque} \quad A^{***}_{*\mu**} \\ + \Gamma^{\mu}_{\alpha i} A^{*\alpha*}_{****} & \text{pour chaque} \quad A^{*\mu*}_{****} \end{cases} .$$

On vérifiera que ce schème donne bien les formules (8), (10), (25), (26), (27).

Rappelons encore que *les dérivées en* D *ne sont pas permutables.* L'interversion de telles dérivations conduit aux formules (29) et (30), c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ \dfrac{DP_k}{Dx_i} & \dfrac{DP_k}{Dx_j} \end{vmatrix} = P_\alpha B^\alpha_{kji} , \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ \dfrac{DP^k}{Dx_i} & \dfrac{DP^k}{Dx_j} \end{vmatrix} = P^\alpha B^k_{\alpha ij} . \qquad (34)$$

On trouve de même

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_\tau} & \dfrac{D}{Dx_\sigma} \\ \dfrac{DA_{\mu\nu}}{Dx_\tau} & \dfrac{DA_{\mu\nu}}{Dx_\sigma} \end{vmatrix} = B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} A_{\rho\nu} + B^{\rho}_{\nu\sigma\tau} A_{\mu\rho} \; . \tag{35}$$

Rappelons encore que les expressions à indices des formules précédentes peuvent former des produits dérivables en D comme les produits ordinaires le sont en ∂. Ainsi, l'indice τ désignant une dérivation en D par rapport à x_τ, on a

$$\left(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} A_\rho\right)_\tau = \left(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\tau A_\rho + B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} A_{\rho\tau} \; . \tag{36}$$

Soit maintenant l'identité évidente

$$\begin{aligned} &(A_{\mu\nu\sigma\tau} - A_{\mu\nu\tau\sigma}) + (A_{\mu\sigma\tau\nu} - A_{\mu\sigma\nu\tau}) + (A_{\mu\tau\nu\sigma} - A_{\mu\tau\sigma\nu}) \\ = \; &(A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu})_\tau + (A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma})_\nu + (A_{\mu\tau\nu} - A_{\mu\nu\tau})_\sigma \; . \end{aligned}$$

Dans la première ligne donnons aux parenthèses la forme du second membre de (35), dans la seconde la forme du second membre de la première relation (34); si alors on effectue les dérivations conformément à (36), il vient

$$\left(B^{\rho}_{\nu\sigma\tau} + B^{\rho}_{\sigma\tau\nu} + B^{\rho}_{\tau\nu\sigma}\right) A_{\mu\rho} = \left[\left(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\tau + \left(B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}\right)_\nu + \left(B^{\rho}_{\mu\tau\nu}\right)_\sigma\right] A_\rho \; .$$

Or, comme on peut le vérifier directement,

$$B^{\rho}_{\nu\sigma\tau} + B^{\rho}_{\sigma\tau\nu} + B^{\rho}_{\tau\nu\sigma} = 0 \; . \tag{37}$$

Donc

$$\left(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\tau + \left(B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}\right)_\nu + \left(B^{\rho}_{\mu\tau\nu}\right)_\sigma = 0 \; . \tag{38}$$

Telle est l'égalité que M. T. Levi-Civita appelle l'*identité de Bianchi*; le procédé de démonstration précédent est dû à M. A.-E. Harward.

Si l'on observe que

$$B^{\rho}_{\nu\sigma\tau} = - B^{\rho}_{\nu\tau\sigma} \; , \tag{39}$$

cette identité (38) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_\nu} & \dfrac{D}{Dx_\sigma} & \dfrac{D}{Dx_\tau} \\ B^{\rho}_{\mu\nu\omega} & B^{\rho}_{\mu\sigma\omega} & B^{\rho}_{\mu\tau\omega} \\ \nu & \sigma & \tau \end{vmatrix} = 0 \; . \tag{40}$$

Elle a alors exactement même structure que les mineurs des termes de la première ligne dans le déterminant Δ_2 de la seconde formule stokienne fondamentale (3) et ceci est de la plus haute importance; nous verrons bientôt, en effet, que les théories einsteiniennes font reposer les conceptions mécaniques générales sur l'identité (40) et, comme l'électromagnétisme repose sur (3) il y a ici une manière de saisir un des principaux liens unissant les deux disciplines.

Ajoutons que (40) n'est qu'un cas très particulier des « Identités de la Gravifique » récemment réétudiées et réexposées de manière particulièrement didactique par M. Th. De Donder.

XI. — Compléments sur les B a quatre indices.

Par définition et avec le mécanisme des g à deux indices exposé au paragraphe VIII, on a

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\tau\alpha} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} , \qquad B^{\tau}_{\mu\nu\sigma} = g^{\tau\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha} . \tag{41}$$

D'après (31) on voit facilement que $B_{\mu\nu\sigma\tau}$ peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{bmatrix}\mu\sigma\\ \tau\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\nu} + \begin{Bmatrix}\sigma\mu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\nu\\ \tau\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\nu\mu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\sigma\\ \tau\end{bmatrix} .$$

Si l'on tient compte de la formule du paragraphe VIII

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix}ik\\ j\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}ij\\ k\end{bmatrix} ,$$

il vient, toujours pour $B_{\mu\nu\sigma\tau}$, après simplifications

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\tau \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\right) + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\tau\\ \alpha\end{bmatrix} .$$

De là résulte

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = - B_{\mu\sigma\nu\tau} , \qquad B_{\tau\nu\sigma\mu} = - B_{\mu\nu\sigma\tau} , \tag{42}$$

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = B_{\sigma\tau\mu\nu} , \qquad B_{\nu\mu\tau\sigma} = B_{\mu\nu\sigma\tau} . \tag{43}$$

D'après la définition, encore donnée au paragraphe VIII, pour $G_{\alpha i}$, on a

$$G_{\mu\nu} = g^{\alpha}_{\sigma} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = B^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = g^{\sigma\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha} . \tag{44}$$