XIV. — Formules antistokiennes. — Equations canoniques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Enfin, après avoir rapproché Lie et Einstein, il est presque impossible de ne pas dire quelques mots de l'admirable conférence faite au Congrès de Toronto par M. Elie CARTAN, conférence reproduite par *L'Enseignement mathématique* en tête du présent volume. Ici nous venons seulement de rapprocher les bases analytiques des deux théories. Envisager le jeu des groupes dans les espaces généralisés est une autre question ; cependant, comme le montre M. Cartan, ce jeu n'est souvent possible que grâce au parallélisme généralisé de M. Levi-Civita et, comme nous l'avons montré, ce parallélisme apparaît immédiatement avec les toutes premières propriétés déduites de nos identités fondamentales (1). Ces identités, nous y reviendrons plus loin (§ 15), peuvent être considérées à un point de vue purement analytique ou comme attachées à des volumes ou aires de l'espace euclidien. C'est donc l'étude approfondie de l'espace euclidien qui peut inciter à envisager des espaces différents ; de même le seul usage du symbole analytique permet de créer *logiquement* espaces et groupes.

XIV. — FORMULES ANTISTOKIENNES. — EQUATIONS CANONIQUES.

Abordons maintenant les analogies des Théories einsteiniennes et des Théories dynamiques classiques. Le sujet possède déjà de nombreux développements faits à différents points de vue. Ici nous voulons simplement faire naître les équations canoniques de Jacobi-Hamilton de considérations analogues à celles sur lesquelles repose l'analyse einsteinienne.

Soient les deux types de matrices

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial x_3} & \cdots \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_3} & \cdots \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial A}{\partial x_j} & \dfrac{\partial B}{\partial x_j} & \dfrac{\partial C}{\partial x_j} & \cdots \\ \dfrac{\partial A}{\partial y_j} & \dfrac{\partial B}{\partial y_j} & \dfrac{\partial C}{\partial y_j} & \cdots \end{matrix} \quad . \qquad (63)$$

Le premier type suppose au moins deux fonctions et un nombre quelconque de variables ; c'est le type déterminant fonctionnel ou type *stokien* qui joue le rôle fondamental en Analyse einsteinienne. Le second type (63) suppose un nombre quelconque de fonctions et au moins deux variables, généralement deux séries de variables; ce sera le type *antistokien*.

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur la seconde matrice (63) consiste à supposer nuls les mineurs qu'on en peut tirer; ceci s'écrira, par exemple,

$$\frac{\partial B}{\partial x_j}\frac{\partial C}{\partial y_j} - \frac{\partial B}{\partial y_j}\frac{\partial C}{\partial x_j} = 0$$

avec j devenant naturellement indice de sommation. Pour satisfaire à une telle équation nous pouvons nous donner arbitrairement B ou C, soit C. Alors B satisfait à une équation aux dérivées partielles dont l'intégration entraîne la considération préliminaire du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial C}{\partial y_j}, \qquad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial C}{\partial x_j}. \tag{64}$$

Ce sont précisément les *équations canoniques* de Jacobi et Hamilton. Elles représentent la partie *amétrique* de la Dynamique; pour qu'elles s'appliquent réellement à un système dynamique il faut pouvoir exprimer la *force vive* de celui-ci, ce qui suppose un ds^2 bien déterminé pour chaque point du système; les choses se passent donc ici comme en Gravifique.

Pour plus de détails nous renverrons à notre Quatrième Mémoire des *Annales de Toulouse* et aux *Leçons de Mécanique Céleste* de H. Poincaré. Le tome premier de ces *Leçons* repose entièrement sur les propriétés des équations canoniques, propriétés *stokiennes* quant aux *solutions*, *antistokiennes* quant aux *intégrales* de ces équations.

C'est ainsi que l'on aperçoit déjà, chez l'illustre savant que fut Henri Poincaré, des méthodes propres à réunir la Physique mathématique et la Mécanique céleste.

XV. — Equations de Maxwell. — Compléments.

Les équations de Maxwell-Lorentz données dans notre Première Note sont les équations parfaitement symétriques qui jouent le rôle essentiel dans les travaux de Lorentz lui même. L'illustre savant paraît y tenir particulièrement et a même écrit