XV. — Equations de Maxwell. — Compléments.

de fonctions et au moins deux variables, généralement deux séries de variables; ce sera le type *antistokien*.

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur la seconde matrice (63) consiste à supposer nuls les mineurs qu'on en peut tirer; ceci s'écrira, par exemple,

$$\frac{\partial B}{\partial x_j}\frac{\partial C}{\partial y_j} - \frac{\partial B}{\partial y_j}\frac{\partial C}{\partial x_j} = 0$$

avec j devenant naturellement indice de sommation. Pour satisfaire à une telle équation nous pouvons nous donner arbitrairement B ou C, soit C. Alors B satisfait à une équation aux dérivées partielles dont l'intégration entraîne la considération préliminaire du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial C}{\partial y_j}, \qquad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial C}{\partial x_j}. \tag{64}$$

Ce sont précisément les *équations canoniques* de Jacobi et Hamilton. Elles représentent la partie *amétrique* de la Dynamique; pour qu'elles s'appliquent réellement à un système dynamique il faut pouvoir exprimer la *force vive* de celui-ci, ce qui suppose un ds^2 bien déterminé pour chaque point du système; les choses se passent donc ici comme en Gravifique.

Pour plus de détails nous renverrons à notre Quatrième Mémoire des *Annales de Toulouse* et aux *Leçons de Mécanique Céleste* de H. Poincaré. Le tome premier de ces *Leçons* repose entièrement sur les propriétés des équations canoniques, propriétés *stokiennes* quant aux *solutions*, *antistokiennes* quant aux *intégrales* de ces équations.

C'est ainsi que l'on aperçoit déjà, chez l'illustre savant que fut Henri Poincaré, des méthodes propres à réunir la Physique mathématique et la Mécanique céleste.

XV. — Equations de Maxwell. — Compléments.

Les équations de Maxwell-Lorentz données dans notre Première Note sont les équations parfaitement symétriques qui jouent le rôle essentiel dans les travaux de Lorentz lui même. L'illustre savant paraît y tenir particulièrement et a même écrit à leur sujet: Though perhaps the way in which they are deduced will be changed in future years, it is hardly conceivable that the equations themselves will have to be altered (*Theory of Electrons*, 1916, p. 6).

Ceci n'empêche pas que d'autres ouvrages posent les équations de Maxwell sous une forme plus générale; l'essentiel est alors de remarquer que les nouvelles équations sont encore des adaptations des systèmes (14) et (15). Voici un important exemple.

D'abord, dans le système (14), convenons d'écrire $4\pi\rho$ au lieu de ρ. Posons ensuite $\rho V = C$ et

$$(M_{23}, M_{31}, M_{12}) \equiv B \quad , \qquad (M_{14}, M_{24}, M_{34}) \equiv -c\mathcal{H} \ ,$$

$$(M^*_{23}, M^*_{31}, M^*_{12}) \equiv \mathcal{B} \quad , \qquad (M^*_{14}, M^*_{24}, M^*_{34}) \equiv c(H - H^e) \ .$$

Alors les systèmes (14) et (15) deviennent

$$\mathrm{rot}\,\mathcal{H} = \frac{1}{c}\left(4\pi C + \frac{\partial B}{\partial t}\right) , \qquad \mathrm{div}\,B = 4\pi\rho \ ;$$

$$\mathrm{rot}\,(H - H^e) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} , \qquad \mathrm{div}\,\mathcal{B} = 0 \ .$$

Telles sont les équations de Maxwell dans la *Théorie mathématique de l'Electricité* de M. Th. De Donder (pp. 162-164). B est l'induction électrique, $\mathcal{B}$ est l'induction magnétique, C est le courant de convection. De plus

$$H - H^e = H^i + H^s$$

avec H^i force électrique induite et rot $H^s = 0$.

Des formules à peu près analogues sont données par M. Francis D. Murnaghan qui insiste beaucoup sur le caractère *amétrique* des équations de Maxwell. La chose était sans doute bien connue et peut même être considérée comme évidente, mais on ne saurait trop marquer son rôle au début des théories gravifiques. Les systèmes (14) et (15) sont même indépendants de tout substratum géométrique, métrique ou amétrique, la seconde identité (1) qui leur donne naissance pouvant être considérée à un point de vue exclusivement analytique, dans le domaine du nombre pur; le volume V et sa frontière, la surface S, ne sont intervenus que comme images *commodes*, l'appel aux notions géométriques n'étant obligatoire en rien.