SPECTRES DES PROBABILITÉS

Autor(en): **Petrovitch, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515761

SPECTRES DES PROBABILITÉS

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

Je désigne comme *spectre* d'une suite limitée ou illimitée de nombres

$$M_1, M_2, M_3, \ldots \tag{1}$$

un nombre décimal S rattaché à la suite (1) et jouissant de cette propriété que chaque nombre M_k est, directement ou indirectement, déterminé par un groupe de décimales successives de S.

Comme je l'ai montré [1], on peut calculer un spectre d'une suite (1) toutes les fois que cette suite se laisse mettre en correspondance avec une série de puissances dont les coefficients ou bien sont des nombres réels entiers positifs N_k, ou bien se laissent ramener à de tels nombres par une transformation

$$\Omega(M_k, N_k, k) = 0 . \tag{2}$$

Or, dans un grand nombre de problèmes de probabilités, la probabilité considérée apparaît comme coefficient d'une puissance x_k dans le développement d'une fonction déterminée $f(x)$ rattachée au problème, ou, plus généralement, comme coefficient de $x^k y^h z^m \ldots$ dans le développement d'une fonction déterminée $F(x, y, z, \ldots)$.

Pour ne citer qu'un des problèmes fondamentaux et des plus élémentaires de cette espèce, considérons deux événements contraires A et B, ayant pour probabilités respectives p et q sur μ événements dans lesquels l'un ou l'autre de ces événements doit arriver infailliblement. La probabilité α_k pour que, sur

---

[1] *Les spectres numériques* (Gauthier-Villars, Paris. 1919).

u épreuves, l'événement A se produise $\mu - k$ fois (et B k fois), coïncidera avec le coefficient de x^k du polynome

$$f(x) = (p + qx)^\mu = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\mu x^\mu \,, \tag{3}$$

p et q étant les probabilités respectives de A et B.

La combinaison la plus probable, c'est-à-dire dans laquelle le nombre d'arrivées de l'événement A est μp, et celui de B μq, a la probabilité égale au coefficient de $x^{(1-p)\mu}$ dans le développement (1).

La probabilité pour que, sur μ épreuves, l'événement A arrive au moins $\mu - k$ fois (c'est-à-dire l'événement B au plus k fois), coïncide avec le coefficient de x^k ($k = 1, 2, 3 \ldots \mu$) dans le développement

$$f_1(x) = \frac{(p + qx)^\mu}{1 - x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots \tag{4}$$

Lorsque les u épreuves assignent aux événements A et B les probabilités successives

$$(p_1, q_1) \,, \quad (p_2, q_2) \,, \ldots \, (p_\mu, q_\mu) \,,$$

la probabilité pour que A arrive au cours de ces μ épreuves m fois, et B n fois, coïncide avec le coeffidient de $x^m y^n$ dans le développement de la fonction

$$F(x, y) = (xp_1 + yq_1)(xp_2 + yq_2) \cdots (xp_\mu + yq_\mu) \,. \tag{5}$$

Dans de pareils cas, la probabilité considérée P_k varie avec un entier positif k désignant, par exemple, le nombre de fois qu'un événement déterminé, dans des circonstances déterminées, est présumé d'arriver sur un nombre fixe μ d'épreuves.

Formons le polynome de degré μ

$$f(x) = P_1 x + P_2 x^2 + \ldots + P_\mu x^\mu \,, \tag{6}$$

et soit

$$\Omega(u, v) \; 0 \,, \tag{7}$$

une relation telle qu'à chaque valeur $u = P_k$ correspond, comme solution de (7), un nombre entier positif $v = N_k$. Enfin, soit

$$\varphi(x) = N_1 x + N_2 x^2 + \ldots + N_\mu x^\mu \,, \tag{8}$$

le polynome de degré μ ayant pour coefficients les entiers N_k.

Un spectre S de la suite de probabilités P_k sera fourni par la valeur que prend $\varphi(x)$ pour $x = 10^{-h}$, où h est un entier positif convenablement choisi. Notamment, h est un entier quelconque égal ou supérieur au logarithme du plus grand terme de la suite N_k.

La probabilité P_k *pour que l'événement se produise* k *fois sur* μ *épreuves, sera fournie par la solution en u de l'équation* (7), *après y avoir remplacé v par le groupe de décimales de* S *commençant par la* $(hk+1)^{\text{ième}}$ *et terminé par la* $(k+1)h^{\text{ième}}$ *décimale.*

Dans un grand nombre de problèmes, on connaîtra facilement les polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ rattachés au problème, comme on le voit déjà sur les exemples simples cités. Les probabilités respectives de deux événements A et B étant deux nombres rationnels

$$p = \frac{A}{M}, \qquad q = 1 - \frac{A}{M}, \tag{9}$$

on aura

$$\Omega(u, v) = M^{\mu} u - v, \tag{10}$$

$$\varphi(x) = M^{\mu}[(p + qx)^{\mu} - p^{\mu}], \tag{11}$$

Dans l'exemple où

$$p = \frac{2}{3}, \qquad q = \frac{1}{3}, \tag{12}$$

le spectre des probabilités pour que, sur 10 épreuves, l'événement A se produise $10-k$ fois (et B k fois) ($k = 1, 2, 3 \dots 10$), sera fourni par la valeur que prend l'expression

$$\varphi(x) = 3^{10}\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right)^{10} - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right] = (2 + x)^{10} - 2^{10}, \tag{13}$$

pour $x = 10^{-h}$. Sachant qu'aucun entier N_k n'a plus de cinq chiffres, on peut prendre $h = 5$, ce qui fournit comme spectre des probabilités

$$S = (2 + 10^{-5})^{10} - 2^{10} =$$

$$= 0{,}05120\;11520\;15360\;13440\;08064\;03360\;00960\;00180\;00020\;00001. \tag{14}$$

La probabilité pour que, sur 10 épreuves, l'événement A arrive $10-k$ fois (et B k fois), s'obtient en divisant par

$$M^{\mu} = 3^{10} = 59049,$$

le groupe de décimales de S commençant par la $(hk+1)^{\text{ième}}$ et terminée par la $(k+1)h^{\text{ième}}$ décimale. Ainsi, pour que A arrive six fois et B quatre fois, il y a la probabilité

$$P_4 = \frac{8064}{59049} = 0{,}136545 .$$

La combinaison la plus probable est celle ayant comme probabilité le groupe de décimales 15360 divisé par 59049, c'est-à-dire la probabilité 0,260123; c'est la combinaison où A arriverait sept fois et B trois fois dans dix épreuves.

Vérification: la probabilité pour que, sur dix épreuves, B arrive au plus μ fois, c'est-à-dire la certitude, est bien égale à la somme de tous les groupes successifs à cinq décimales de S, augmentée de $2^{10} = 1024$, le tout divisé par 59049, ce qui fait

$$\frac{1024+5120+11520+15360+13440+8064+3360+960+180+20+1}{59049} = 1 .$$

Les probabilités respectives de A et B étant (9), la détermination de la probabilité Q_k pour que, sur μ épreuves, A arrive au moins k fois (et B au plus $\mu - k$ fois) $(k = 1, 2, \ldots \mu)$ se ramène à la formation du spectre suivant:

Le nombre Q_k étant la somme de k premiers coefficients de la fonction $(p+qx)^{\mu}$, admettra encore la transformation (10) et le spectre des Q_k sera fourni par la valeur que prend l'expression

$$\varphi_1(x) = M^{\mu}\frac{(p+qx)}{1-x}, \tag{15}$$

pour $x = 10^{-h}$, où h désigne un entier quelconque égal ou supérieur au logarithme du plus grand terme de la suite correspondante N_k, Le spectre sera donc le nombre

$$S = M^{\mu}\frac{(10^{h}p+q)^{\mu}}{10^{\mu h} - 10^{(\mu-1)h}} . \tag{16}$$

La probabilité Q_k *sera*

$$Q_k = S_k M^{-\mu} , \tag{17}$$

où S_k *représente le groupe de décimales de* S *commençant par le* $(hk+1)^{\text{ième}}$ *et terminé par le* $(k+1)h^{\text{ième}}$ *décimale.*

Dans l'exemple cité où p et q ont les valeurs (12), on peut prendre $h = 5$ et l'on aura

$$S = \frac{(2 \cdot 10^5 + 1)^{10}}{10^{50} - 10^{45}} =$$

$$= 0{,}06144\,17664\,33024\,46464\,54528\,57888\,58848\,59028\,59048\,59049 \ .$$

La probabilité pour que, sur dix épreuves, l'événement A arrive au moins $10-k$ fois (et B au plus k fois) s'obtient en divisant par 59049 le groupe de décimales de S commençant par la $(hk+1)^{\text{ième}}$ et terminée par la $(k+1)h^{\text{ième}}$ décimale. Ainsi, pour que A arrive au moins six fois (B au plus quatre fois), il y a la probabilité

$$Q_4 = \frac{46\,464}{59\,049} = 0{,}786872 \ ,$$

et pour que B arrive au plus dix fois (la certitude), il y a bien la probabilité

$$Q_{10} = \frac{59\,049}{59\,049} = 1 \ .$$

Mai 1925.

SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES $p-1$ PREMIERS NOMBRES ENTIERS, p ÉTANT UN NOMBRE PREMIER

PAR

A. Lévy (Paris).

On sait que la congruence

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \qquad \text{module } p \ , \qquad\qquad (p \text{ premier})$$

admet comme racines, 1, 2, ..., $p-1$. Les coefficients de cette congruence sont

$$a_1 = 0 \ , \qquad a_2 = 0 \ , \ \ldots \ , \ a_{p-2} = 0 \ , \qquad a_{p-1} \equiv 1 \ ,$$

où la forme de la congruence générale est

$$x^{p-1} - a_1 x^{p-2} + a_2 x^{p-3} + \ldots + a_{p-1} \equiv 0 \ , \qquad \text{module } p.$$