Introduction.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

COMBIEN PASSE-T-IL DE LIGNES DE COURBURE PAR UN OMBILIC ?

PAR

Marcel WINANTS (Liége).

SOMMAIRE: Introduction. — Quelques cas particuliers du problème des trajectoires orthogonales. — Réponse à la question proposée. — Conclusion.

INTRODUCTION.

Pour la généralité du problème nous considérerons une ligne de courbure comme une telle ligne d'une surface que les normales en ses différents points forment une surface développable. Les lignes de courbure se distribuent alors en deux familles: les lignes de l'une de ces familles sont les trajectoires orthogonales des lignes de l'autre famille; par chaque point de la surface, qui n'est pas un ombilic, il passe une et une seule ligne de chacune des deux familles, et ces deux lignes de courbure se coupent à angle droit.

Mais qu'arrive-t-il en un ombilic ? Cette question n'est pas traitée explicitement dans les ouvrages courants d'Analyse. Dans le *Calcul différentiel* de Joseph BERTRAND et dans le *Traité d'Analyse* de M. E. PICARD elle n'est qu'effleurée. A notre connaissance HOÜEL seul s'en occupe: dans son *Calcul infinitésimal* (Paris, 1879) il y consacre un paragraphe particulier (nº 704); ses assertions sont d'ailleurs inexactes, ou tout au moins très incomplètes.

Nous ne prétendons pas résoudre la question d'une manière définitive, mais seulement en montrer toute la difficulté; nous serons suffisamment heureux si nous y apportons une légère contribution. Nous allons rappeler très brièvement quelques cas particuliers du problème bien connu des trajectoires orthogonales, cas auxquels nous comparerons l'ensemble des deux systèmes de lignes de courbure de certaines surfaces. Nous nous occuperons ensuite d'ombilics relativement simples, et nous examinerons enfin les ombilics spéciaux, que nous avons mis en évidence en 1922, dans un mémoire qu'a publié *L'Enseignement mathématique* (22e année).

Trajectoires orthogonales.

α) Si les axes coordonnés sont rectangulaires, les parallèles à l'axe des x ($y = C_1$) ont comme trajectoires les parallèles à l'axe des y ($x = C_2$). Par chaque point du plan, il passe une et une seule droite de chacune des deux familles. *A distance finie* aucun point *réel* du plan ne se singularise.

β) Les droites issues de l'origine ou du pôle ($\omega = C_1$) ont comme trajectoires des circonférences concentriques ($\rho = C_2$). Par chaque point *réel* du plan il passe une et une seule des circonférences considérées; par tout point distinct du pôle, on ne peut mener qu'une seule droite de la famille envisagée. Mais toutes les droites de cette famille concourent au pôle qui nous apparaît ainsi comme un point singulier.

γ) Soient les différentes circonférences passant par deux points fixes:

$$x^2 + y^2 + my - a^2 = 0 \ ;$$

l'équation différentielle des trajectoires orthogonales peut s'écrire

$$(y^2)' - \frac{1}{x} \cdot (y^2) = - x + \frac{a^2}{x} \ ;$$

c'est une équation linéaire du premier ordre, dont voici l'intégrale générale:

$$x^2 + y^2 - nx + a^2 = 0 \ ;$$

et l'on retrouve un résultat classique (Cf. *Cours de Géométrie analytique plane* de Falisse-Gob; Bruxelles, Lebègue, 1912; pp. 208-212). Par chaque point du plan passe un et un seul cercle n; tous ces cercles forment un faisceau dont les points