

SUR L'INSCRIPTION DES POLYGONES RÉGULIERS

Autor(en): **Lebesgue, Henri**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515768>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR L'INSCRIPTION DES POLYGONES RÉGULIERS

PAR

Henri LEBESGUE, Membre de l'Institut (Paris).

1. — Tandis que l'étude de l'inscription des polygones réguliers faite par les méthodes de l'Analyse constitue un ensemble admirablement cohérent; le chapitre correspondant de la géométrie élémentaire paraît basé sur les remarques les plus disparates; tout est à reprendre et à modifier, semble-t-il, quand on passe du cas du carré à celui du triangle, ou du triangle au pentagone, ou de celui-ci au pentédécagone. Peut-être y aurait-il avantage à mettre quelques généralités à la base de ces constructions, même ne le pourrait-on qu'un peu artificiellement. C'est le but de l'exposé sommaire qu'on va lire; je me suis efforcé de montrer que les procédés classiques ne sont que l'application des méthodes de Gauss à des cas particulièrement simples. On est ainsi tout naturellement amené à énoncer les résultats des recherches de Gauss; l'étude de ces recherches serait ainsi préparée dès la géométrie élémentaire.

2. — Supposant établie la règle qui permet de déduire la construction des divers polygones réguliers de N côtés de la division de la circonférence en N parties égales, nous allons rechercher des cas où cette division peut s'effectuer à l'aide de la règle et du compas.

La division d'un arc de cercle en deux parties égales s'effectuant à l'aide de la règle et du compas, si l'on sait diviser la circonférence en N parties égales, on sait aussi la diviser en $2N$ parties. La réciproque est évidemment vraie. Nous utilisons cette remarque pour transformer notre problème: *nous nous proposons maintenant de diviser la demi-circonférence en N parties égales.*

3. — On sait effectuer cette division pour $N = 2$, nous venons de le dire. Une subdivision en 2 parties égales de chaque arc ainsi obtenu fournit la solution pour $N = 4$; en continuant ainsi nous effectuons la division demandée pour $N = 2^k$.

Si AB est une corde d'une circonférence de rayon R , si C et D sont les milieux des arcs $A B$, le triangle rectangle $C A D$ nous donne:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = 4R^2 ; \quad \overline{AC} \cdot \overline{AD} = R \cdot \overline{AB} .$$

Ces formules fournissent de suite les expressions des côtés du carré, des octogones, etc., des polygones de 2^k côtés.

4. — Si N n'est pas égal à 2^k , c'est-à-dire s'il est de la forme $2^k n$, n étant un nombre impair plus grand que 1, le problème de la division en N parties est équivalent à celui de la division en n parties. Puisque cette dernière division entraîne celle en $2n$ parties, puis en $4n$ parties, etc., en $2^k n$ parties.

Nous étudions donc la division d'une demi-circonférence en un nombre impair, n , de parties égales; la circonférence sera divisée en $2n$ parties. Soit (p) la longueur de la corde sous-tendant p de ces parties; le symbole (p) a actuellement un sens pour $0 \leq p \leq 2n$. Nous allons établir des relations entre les longueurs (1) , (3) , (5) , ..., $(n-2)$ qui nous permettront, pour certaines valeurs de n , de les construire. Il est clair que cette construction résoudra le problème posé; pour n premier, les longueurs considérées sont celles des polygones réguliers de $2n$ côtés; pour n composé les longueurs de ces côtés sont seulement certaines des quantités (1) , (3) , ..., $(n-2)$.

5. — Désignons par $-\overline{[n-1]}$, $-\overline{[n-2]}$, ... $-\overline{1}$, 0 , $\overline{1}$, ... \overline{n} les $2n$ points de division de la circonférence en $2n$ parties égales. Traçons la ligne brisée $\overline{0, 1}$; $\overline{1, -2}$; $-\overline{2, 3}$; $\overline{3, -4}$; etc. Les longueurs des côtés de cette ligne sont (1) , (3) , (5) , (7) , ..., nous nous arrêterons quand nous aurons parcouru la moitié du côté de longueur (n) , ce qui nous ramènera au centre Ω de la circonférence considérée puisque $(n) = 2R$.

Les segments parcourus sont, de deux en deux, parallèles, [puisque, entre les extrémités de $\overline{0, 1}$ et celles de $-\overline{2, 3}$, par exemple, on a deux arcs égaux de sens contraire]; les segments sont de

même sens [puisqu'e, par exemple, les extrémités considérées se succèdent dans l'ordre $-2, 0, 1, 3$].

La résultante $O\Omega$ de la ligne brisée considérée est donc le troisième côté d'un triangle $OT\Omega$ dont les deux autres côtés, l'un porté par $\overline{0, 1}$, l'autre par une parallèle à $\overline{-2, 1}$, sont

$$OT = (1) + (5) + (9) + \dots$$

$$T\Omega = (3) + (7) + \dots$$

Les derniers termes de ces sommes dépendent de la nature de n .
Pour $n =$ multiple de $4+1$,

$$OT = (1) + (5) + \dots + (n-4) + R ;$$

$$T\Omega = (3) + (7) + \dots + (n-2) ;$$

pour $n =$ multiple de $4-1$,

$$OT = (1) + (5) + \dots + (n-2) ;$$

$$T\Omega = (3) + (7) + \dots + (n-4) + R .$$

Le triangle $OT\Omega$ est isocèle, car l'angle $\Omega O1$ est un angle inscrit qui comprend entre ses côtés $n-1$ divisions et l'angle de $O\Omega$ avec la droite $\overline{-2, 1}$ est un angle intérieur à la circonférence qui comprend entre ses côtés les arcs $\widehat{0, 1}$ et $\widehat{2, n}$, donc $n-1$ divisions.

Ainsi $OT = \Omega T$, ceci nous donne la relation fondamentale:

$$I \left\{ \begin{array}{l} (1) + (5) + \dots + (n-4) + R = (3) + (7) + \dots + (n-2) , \\ \quad \quad \quad \text{si } n = 4k + 1 ; \\ (1) + (5) + \dots + (n-2) = (3) + (7) + \dots + (n-4) + R , \\ \quad \quad \quad \text{si } n = 4k - 1 . \end{array} \right.$$

6. — Soient $AB, A_1 B_1$ deux cordes parallèles et de même sens de la circonférence de rayon R , soit BC un segment équipollent à $A_1 B_1$, le triangle $AB_1 C$ est isocèle, son côté $B_1 C$ étant équipollent à $A_1 B_1$, qui est égal à AB_1 . L'angle au sommet B_1 de ce triangle est celui des angles des deux cordes $AB_1, A_1 B$ qui contient AB ; si la longueur de AB est (p) celle de BB_1 (q) , auquel

cas celle de A_1B_1 est $(p+2q)$, l'angle considéré est un angle intérieur contenant entre ses côtés un nombre de divisions égal à

$$p + \{2n - [p + 2q]\} = 2[n - q] .$$

Donc, il est celui du triangle isocèle dont la base $\alpha\beta$ est une corde de longueur $(n-q)$ et dont le sommet est le centre Ω de la circonférence. La similitude de ces deux triangles isocèles donne:

$$\frac{AC}{AB_1} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\Omega} \quad \text{ou} \quad \frac{(p) + (p + 2q)}{(p + q)} = \frac{(n - q)}{R} ,$$

c'est la seconde relation fondamentale que je voulais établir. Mais il convient de la prouver aussi dans l'hypothèse où la signification du symbole (k) aurait été étendue à toutes les valeurs entières positives ou négatives de k , grâce à l'égalité de définition:

$$(k) = - (k - 2n) .$$

Un sens de parcours ayant été choisi sur notre cercle, fixant une orientation dans le plan, considérons un arc Ab de milieu i et le systèmes d'axes $\Omega x, \Omega y$ tel que l'angle $x\Omega y$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$ et que la demi-droite Ωx passe par i . Si l'arc Ab est très petit positif, il est clair qu'il y a accord entre les sens de Ab et de Ωy ; si l'on fait mouvoir b cet accord subsiste tant que b ne passe pas d'un côté à l'autre de A auquel cas l'accord cesse pour se reproduire à nouveau quand b passe à nouveau par A , et ainsi de suite. Si donc on fait varier \widehat{Ab} de zéro à $p\frac{\pi}{n}$, p étant un entier positif ou négatif, b vient en un point B , i en I , $x\Omega y$ en $X\Omega Y$ et la mesure de \overline{AB} , comptée parallèlement à l'axe ΩY , est (p) .

Soient maintenant $\widehat{A_1A}, \widehat{BB_1}$ deux arcs égaux à $q\frac{\pi}{n}$; l'arc

$$\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_1A} + \widehat{AB} + \widehat{BB_1} = [p + 2q]\frac{\pi}{n} ,$$

a même milieu I que l'arc \widehat{AB} , donc le segment A_1B_1 , compté sur l'axe ΩY , est égal à $(p + 2q)$. Si nous construisons le segment BC équipollent à $(p + 2q)$, le segment AC compté parallèlement à ΩY est égal à

$$(p) + (p + 2q) .$$

L'un des arcs AB_1 est égal à $(p + q) \frac{\pi}{n}$, soient I_1 son milieu et $\Omega X_1 Y_1$ le système d'axes rectangulaires d'orientation directe, tel que ΩX_1 passe par I_1 . Le segment AB_1 , compté parallèlement à ΩY_1 , est égal à

$$(p + q) .$$

Soit β le point de rencontre de la demi-droite ΩY_1 avec la circonférence, et soit α le symétrique de β par rapport à ΩX .

L'un des arcs $\widehat{I\beta}$ est égal à $\widehat{II_1} + \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\frac{q}{2} \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$, donc

l'un des arcs $\alpha\beta$, qui a I pour milieu, est égal à $q \frac{\pi}{n} + \pi = [n + q] \frac{\pi}{n}$.

Par suite $\overline{\alpha\beta}$, compté parallèlement à ΩY , a pour mesure $(q + n)$.

Les deux triangles isocèles $AB_1 C$, $\beta\Omega\alpha$ ont leurs côtés parallèles, ils sont semblables. On en déduit, en mesurant les segments parallèlement à ΩY et à ΩY_1 ,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{\beta\alpha}}{\overline{\beta\Omega}} \quad \text{ou} \quad \frac{(p) + (p + 2q)}{(p + q)} = \frac{-(n - q)}{-R} .$$

Changeons de notations; posons

$$p + q = a , \quad n - q = b ;$$

d'où

$$p = a + b - n , \quad q = n - b , \quad p + 2q = a - b + n ,$$

nous aurons la seconde relation fondamentale:

$$\text{II} \quad (a) \cdot (b) = [(a + b - n) + (a - b + n)] R .$$

7. — A l'aide des relations I et II on peut calculer et construire nos inconnues (1), (3), ... $(n - 2)$ pour certaines valeurs de n .

Cas de $n = 3$. Il y a alors une seule inconnue (1). La relation I, puisque n est un multiple de 4 diminué de un, est ici :

$$(1) \quad (1) = R .$$

D'où la construction de l'hexagone, puis du triangle. On montrerait que, pour ce cas particulier, la démonstration de I se

réduit au raisonnement qui sert habituellement à la détermination du côté de l'hexagone.

Quant au calcul du côté du triangle on peut le faire à l'aide des formules données au paragraphe 3, mais il est préférable de remarquer que, pour le cas ici considéré de n impair, si la corde o, p de longueur (p) est le côté d'un polygone régulier de $2n$ côtés, la corde \overline{p}, n de longueur ($n - p$) est le côté d'un polygone de n côtés et inversement. Or le triangle opn étant rectangle, on a :

$$\overline{(p)}^2 + \overline{(n - p)}^2 = 4R^2 .$$

Les polygones de n et $2n$ côtés sont donc associés deux à deux de telle façon que les côtés c_n, c_{2n} et les apothèmes a_n, a_{2n} de ces polygones soient liés par les relations

$$c_n^2 + c_{2n}^2 = 4R^2 : \quad 2a_n = c_{2n} , \quad 2a_{2n} = c_n .$$

8. — Cas de $n = 5$. Il y a alors deux inconnues (1) et (3) et les relations fondamentales donnent :

$$(I) \quad (1) + R = (3) : \quad (II) \quad (1)(3) = [(-1) + (3)]R .$$

Or $(-1) = -(1)$.

On connaît donc la différence $(3) - (1)$ et le produit $(3)(1)$ d'où le calcul et la construction des côtés des décagones, puis des pentagones.

On montrerait à quoi se réduit ici la démonstration des relations (I) et (II), on reviendrait ainsi aux considérations classiques à une modification insignifiante près.

9. — Cas de $n = 17$. Les inconnues sont (1), (3), (5), (7), (9), (11), (13), (15). La relation I s'écrit :

$$(I) \quad (1) + (5) + (9) + (13) + R = (3) + (7) + (11) + (15) .$$

La relation II donne vingt huit égalités, parmi lesquelles nous choisissons les suivantes parce qu'elles font intervenir aux deux membres les mêmes groupes de deux côtés.

$$\text{II} \cdot \begin{cases} (1)(13) = [(-3) + (5)]R = [-3 + (5)]R, \\ (3)(5) = [(-9) + (15)]R = [-9 + (15)]R, \\ (9)(15) = [(7) + (11)]R, \\ (7)(11) = [(1) + (13)]R. \end{cases}$$

Ces égalités, tout à fait comparables à celle que nous a fourni la relation II dans le cas de $n = 5$, montrent que l'on saurait construire les huit inconnues si l'on savait construire les quatre longueurs :

$$[-3 + (5)], \quad [-9 + (15)], \quad [(7) + (11)], \quad [(1) + (13)];$$

puiqu'en effet on connaîtrait alors, par exemple, la différence et le produit des deux côtés (3) et (5), la somme et le produit des deux côtés (1) et (13). Nous avons donc simplifié notre problème; essayons de le simplifier encore en groupant deux à deux les quatre longueurs représentées par les crochets précédents.

La relation II donne :

$$\begin{aligned} [-3 + (5)][(7) + (11)] &= -3(7) - 3(11) + 5(7) + 5(11) = \\ &= R \{ + (7) - (13) + (3) - (9) \\ &\quad - (5) + (15) - (1) + (11) \} = R^2, \end{aligned}$$

car la quantité entre accolades est égale à R d'après I;

$$\begin{aligned} [-9 + (15)][(1) + (13)] &= -9(1) - 9(13) + 1(15) + 13(15) = \\ &= R \{ + (7) - (9) - (5) - (13) \\ &\quad - (1) + (3) + (11) + (15) \} = R^2. \end{aligned}$$

Puisque, dans le groupement ainsi choisi, nous connaissons le produit des deux crochets d'un même groupe, nous nous proposons de construire la somme ou la différence des crochets associés. L'examen de la relation (I) conduit à se proposer la construction des deux accolades

$$\begin{aligned} \{a\} &= \{-[-3 + (5)] + [(7) + (11)]\}, \\ \{b\} &= \{-[-9 + (15)] + [(1) + (13)]\}. \end{aligned}$$

La relation (I) s'écrit :

$$\{a\} - \{b\} = R,$$

la relation II donne :

$$\begin{aligned} \{a\} \{b\} &= (3)(9) - (3)(15) + (1)(3) + (3)(13) - (5)(9) + (5)(15) \\ &\quad - (1)(5) - (5)(13) + (7)(9) - (7)(15) + (1)(7) + (7)(13) \\ &\quad + (9)(11) - (11)(15) + (1)(11) + (11)(13) \\ &= R \left\{ \begin{array}{l} - (5) + (11) - (1) - (5) - (13) + (15) - (1) + (7) \\ \quad + (3) - (13) + (3) + (7) + (11) - (13) - (1) \\ - (9) - (1) + (15) - (5) - (9) - (9) + (11) \\ \quad + (3) + (11) + (3) + (15) - (9) - (13) - (5) \\ \quad + (7) + (7) + (15) \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} = 4 \{ - (1) + (3) - (5) + (7) - (9) + (11) - (13) + (15) \} R \\ = 4R^2 . \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $\{a\}$ et $\{b\}$ sont deux longueurs dont la différence est R et le produit $4R^2$, $\{a\}$ étant la plus grande.

$[(7) + (11)]$ et $[-(3) + (5)]$ sont deux longueurs dont la différence est $\{a\}$ et le produit R^2 , $[(7) + (11)]$ étant la plus grande.

$[(1) + (13)]$ et $[-(9) + (15)]$ sont deux longueurs dont la différence est $\{b\}$ et le produit R^2 , $[(1) + (13)]$ étant la plus grande.

Enfin (1) et (13) sont deux longueurs dont la somme est $[(1) + (13)]$ et le produit $R[-(3) + (5)]$, (13) étant la plus grande.

D'où le calcul et la construction de (1) et (13) . Les autres inconnues se calculent de même ; quant à leur construction elle est effectuée dès que l'on a divisé la demi-circonférence en 17 parties égales grâce aux longueurs (1) ou (13) construites.

Le calcul des côtés des polygones de 17 côtés se déduit de là par le procédé indiqué en fin du paragraphe 7.

10. — Dans la construction ci-dessus les $8 = 2^3$ inconnues ont d'abord été réunies en groupes dont les éléments constituants peuvent se déterminer dès que l'on connaît $4 = 2^2$ nouvelles inconnues, les crochets. Ces crochets ont de même été réunis deux par deux, ce qui montrait que leur détermination ne dépendait que de celle de deux accolades dont on connaissait la différence et le produit.

Une méthode analogue ne pourra être utilisée pour une autre

valeur de n , avec la considération d'un nombre différent d'inconnues successives — (), [], { } — que si le nombre des inconnues primitives — les () — est une puissance de 2. Or, ce nombre est $\frac{n-1}{2}$, donc n doit être de la forme $n = 2^k + 1$.

Gauss, qui a le premier montré la possibilité d'inscrire le polygone de 17 côtés, a prouvé en même temps que notre problème pourrait être résolu par une méthode analogue à celle du paragraphe précédent, toutes les fois que n est *premier* et de la forme $2^k + 1$, et il a donné les règles suivant lesquelles les () doivent être groupés en [], ceux-ci en { }, etc.

Il a montré de plus que le problème était impossible pour toute valeur *première* de n , qui n'est pas de la forme $2^k + 1$.

Les valeurs connues de n qui sont premières et de la forme $2^k + 1$ sont peu nombreuses; il n'y a que 3, 5, 17, 257, 65537. Les autres valeurs de n remplissant ces conditions, s'il en existe, sont très supérieures à la dernière indiquée¹.

11. — Si notre problème est possible pour $n = pq$, c'est-à-dire si nous pouvons diviser la demi-circonférence en pq parties égales, nous pouvons la diviser *a fortiori* en p parties. Donc nous n'avons à examiner un nombre n composé que si nous avons déjà résolu le problème de la division pour tous les diviseurs de n . Nous pouvons, par exemple, examiner le cas de $n=3.5=15$.

Pour un tel nombre n composé toutes les *parenthèses* (1), (3) ... (n-2) ne sont pas inconnues; pour $n = 15$, nous connaissons déjà (5), qui est le côté de l'hexagone, (3) et (9), qui sont les côtés des décagones.

Donc pour $n = 15$ nous n'avons comme inconnues que (1), (7), (11), (13). La relation I donne

$$(1) + (5) + (9) + (13) = (3) + (7) + (11) + R ;$$

¹ Pour un exposé des recherches de Gauss fait surtout en vue de leur application à l'inscription des polygones réguliers, on se reportera à un petit opuscule de F. Klein dont J. Griess a publié une traduction française sous le titre: *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire* (Nony, Paris, 1896). Je me suis, à dessein, très peu écarté du texte de Klein.

On pourra consulter aussi le tome II des *Questioni riguardanti le matematiche elementari* de F. Enriques, où l'on trouvera en particulier des constructions du polygone de 17 côtés dues à Serret, à Staudt, à Gérard. Cette dernière n'utilise que le compas.

la relation II donne en particulier

$$(1)(11) = [- (3) + (5)]R, \quad (7)(13) = [(5) + (9)]R.$$

La détermination de nos quatre inconnues revient donc à celle des deux crochets

$$[- (1) + (11)], \quad [- (7) + (13)],$$

dans lesquels on a mis des signes — de façon à utiliser la relation I, qui s'écrit :

$$[- (7) + (13)] - [- (1) + (11)] = R + (3) - (5) - (9) = -R.$$

Il suffit donc de calculer le produit des crochets :

$$\begin{aligned} [- (7) + (13)][- (1) + (11)] &= (1)(7) - (7)(11) - (1)(13) + (11)((13)) \\ &= [- (7) + (9) - (3) - (11) + (1) - (3) \\ &\quad + (9) + (13)]R \\ &= [R - 2.(3) + 2.(9)]R = 3R^2. \end{aligned}$$

Ceci donne la solution de notre problème pour $n = 15$.

Les relations fondamentales I et II peuvent donc encore servir pour certaines valeurs composées de n . Mais il conviendrait d'ajouter que, si la méthode précédente est acceptable en ce qui concerne le calcul des côtés, elle est inutilement compliquée pour leur construction. On exposerait la méthode classique, on conclurait que la construction est possible pour

$$n = 2^m 3^a 5^b 17^c \dots ;$$

les nombres suivant 17 étant les différents nombres premiers de la forme $2^k + 1$, m étant un entier positif ou nul, a, b, c, \dots étant égaux à 0 ou 1.

Et l'on affirmait que la construction n'est possible que pour ces valeurs de n .

12. — J'ai terminé l'exposé que j'avais en vue. Il est certain qu'il ne convient pas pour des débutants; même, il ne saurait se justifier que si l'on traite de la construction du polygone de 17 côtés. Et comme cette construction sort du domaine des programmes ordinaires, on ne peut préconiser un exposé du genre du précédent pour aucune classe. Peut-être, cependant, n'est-il pas inutile d'avoir réfléchi à la possibilité de bâtir de tels exposés;

on s'efforceraient ensuite, inconsciemment peut-être, de présenter la construction de l'hexagone et des décagones sous une forme telle qu'elles apparaissent comme les deux premières applications d'un procédé fournissant des résultats plus généraux. Et peut-être, en exercice, traiterait-on parfois le cas des polygones de 17 côtés.

Puisqu'on ne peut s'adresser qu'à des élèves ayant déjà fait pas mal d'études mathématiques, on pourrait simplifier l'exposé ci-dessus en faisant appel à la trigonométrie et l'on retomberait ainsi, à des détails infimes près, sur les calculs mêmes de Gauss. La relation II n'est qu'une conséquence particulière de la formule donnant $\sin p + \sin q$, formule dont nous avons en somme donné au § 6 une démonstration géométrique directe. La formule I résulte de la sommation d'une suite de sinus d'arcs en progression arithmétique.

Ceci indique une étroite parenté entre les relations I et II, qui n'a pas été mise en évidence précédemment. Pour la faire apparaître, considérons des cordes parallèles de la circonférence de rayon R, AB, A₁B₁, A₂B₂, ... et supposons que l'arc \widehat{AB} soit de p divisions (égales chacune à $\frac{\pi}{n}$), que $\widehat{A_1A} = \widehat{BB_1} = \widehat{A_2A_1} = \widehat{B_1B_2} = \dots = q$ divisions. Et considérons la ligne brisée ABA₁B₁A₂B₂..., prenons BC équipollent à A₁B₁, le triangle ACB₁ (celui que nous avons considéré au paragraphe 6) est semblable à un triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ inscrit dans le cercle et obtenu en prenant $\widehat{\alpha_1\beta_1} = q$ divisions, $\widehat{\beta_1\gamma_1} = q$ divisions, $\widehat{\gamma_1\alpha_1} = 2n - 2q$ divisions. Donc on a :

$$\frac{AC}{AB_1} = \frac{\alpha_1\gamma_1}{\alpha_1\beta_1} \quad \text{ou} \quad \frac{(p) + (p + 2q)}{(p + q)} = \frac{(2n - 2q)}{(q)} = \frac{(2q)}{(q)}$$

Ceci est évident quand p et q sont des nombres positifs assez petits mais, en opérant comme au § 6, on montrerait que la relation est générale. Il résulte de là, en prenant $p' = n - q$,

$$\frac{(2q)}{q} = \frac{(p) + (p + 2q)}{(p + q)} = \frac{(p') + (p' + 2q)}{(p' + q)} = \frac{(n - q) + (n + q)}{(n)} = \frac{(n - q)}{R}$$

c'est la relation II.

Prenons CD équipollent à A₂B₂, le triangle ADB₂ est semblable à un triangle $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ inscrit, tel que $\alpha_2\beta_2 = q$ divisions,

$\beta_2 \delta_2 = 2q$ divisions, $\alpha_2 \delta_2 = 2n - 3q$ divisions. D'où

$$\frac{(p) + (p + 2q) + (p + 4q)}{(p + q) + (p + 3q)} = \frac{(3q)}{(2q)}$$

Et ainsi de suite. Les formules ainsi obtenues comprennent la relation I; prenons en effet $q = 2p$ et supposons p premier avec n , nous aurons, pour le cas où $n = 4k + 1$,

$$\frac{(p) + (5p) + (9p) + \dots + ([3n - 1]p)}{(3p) + \dots + ([2n - 3]p)} = \frac{\binom{n+1}{2}}{\binom{n-1}{2}};$$

ou, en divisant par 2 les deux termes du premier membre et en simplifiant le second grâce à la relation $(k) = (2n - k)$,

$$\frac{(p) + (5p) + \dots + ([n - 4]p) + R}{(3p) + \dots + ([n - 2]p)} = 1,$$

ce qui est la relation I. Le cas de $n = 4k - 1$ se traite de la même manière. Notre nouvelle démonstration de I ne diffère de la première qu'en ceci: nous avons pris $p = 1$, et de plus, nous raisonnons sur un triangle $OT\Omega$, alors que nous raisonnons maintenant sur l'homothétique de $OT\Omega$ pris par rapport à O et dans le rapport 2.

Ce triangle $OT\Omega$ étant isocèle, il existe un triangle $a\Omega b$, de sommet Ω et dont la base est une corde de la circonférence, qui est semblable à $OT\Omega$; l'angle en T étant égal à l'angle ABA_1 , c'est-à-dire à $\frac{q}{2} \frac{\pi}{n} = p \frac{\pi}{n}$, la corde ab est (p) . La similitude de $OT\Omega$ et $a\Omega b$ nous permet d'écrire, pour $n = 4k + 1$, par exemple, la relation I sous la forme plus élégante:

$$\frac{R}{(p)} = \frac{(p) + (5p) + \dots + R}{R} = \frac{(3p) + \dots + ([n - 2]p)}{R}$$

Pour $n = 5$, par exemple, ceci se réduit à

$$\frac{R}{(1)} = \frac{(1) + R}{R} = \frac{(3)}{R},$$

formules qui suffisent pour l'inscription des décagones réguliers.

La relation I, complétée comme il vient d'être dit, suffit d'ailleurs toujours pour l'inscription de tous les polygones réguliers inscriptibles à l'aide de la règle et du compas.