

# MÉTHODE NOUVELLE DE PROJECTION DE L'HYPERESPACE A QUATRE DIMENSIONS

Autor(en): **Hlavaty, V.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515769>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# MÉTHODE NOUVELLE DE PROJECTION DE L'HYPERESPACE A QUATRE DIMENSIONS

PAR

V. HLAVATÝ (Prague).

---

Dans ce mémoire, nous allons exposer les principes de projection de l'hyperespace (à quatre dimensions) sur un plan, à l'aide de deux projections seulement. Nous n'y traiterons que des problèmes fondamentaux, dont la connaissance permet de résoudre les problèmes spéciaux. Nous supposons la connaissance

- A. de la géométrie projective dans un plan,
- B. de la méthode de projection d'un espace linéaire à trois dimensions sur un plan à l'aide de deux centres à l'infini, et
- C. de la géométrie élémentaire de l'hyperespace linéaire à quatre dimensions.

## I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. — *Terminologie.* Nous nous servons de lettres

$a, b, c, \dots$        $A, B, C, \dots$        $\alpha, \beta, \gamma, \dots$        $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$

pour désigner les points  $a, b, c, \dots$ , les droites  $A, B, C, \dots$ , les plans  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , et les espaces à trois dimensions  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$  (brièvement les espaces) dans l'hyperespace (l'espace linéaire à quatre dimensions). Les éléments à l'infini seront dits *impropres*, et désignés par des lettres soulignées  $\underline{a}, \underline{A}, \underline{\alpha} \dots$

Nous appelons *méthode élémentaire de projection* la méthode sub B. Le *rayon de rappel du point  $p$*  joint l'une à l'autre les

projections du point  $p$ . Les indices  $i, k$ , toujours distincts, se rapportent aux valeurs 1 ou 2.

2. — *Eléments fondamentaux.* Choisissons un plan quelconque  $\pi$  avec la droite impropre  ${}^0C$  pour plan de projection. Désignons par  ${}^2C$  la droite impropre du plan complètement orthogonal à  $\pi$ . Tous les plans, dont les deux angles extrêmes d'inclinaison à  $\pi$  sont de la valeur  $+45^\circ$ , se rencontrent suivant la droite  ${}^1C$ . Alors chaque droite du plan passant par  ${}^1C$  forme avec  $\pi$  l'angle  $+45^\circ$ .

## II. — POINT.

1. — Un point quelconque  $a$  de l'hyperespace et la droite  ${}^iC$  déterminent le plan projetant qui coupe le plan de projection  $\pi$  au point  $a_i$ . Nous le désignons comme la  $i$ -ième projection du point  $a$ . Les deux points  $a_1$  et  $a_2$  déterminent à leur tour le point  $a$  de l'espace, car les plans projetants  $(a_1{}^1C)$  et  $(a_2{}^2C)$  se rencontrent en un point  $a$ :

*Le point est fixé par ses deux projections et ces deux projections déterminent à leur tour le point dans l'hyperespace.*

Le point  $a$  et le plan  $\pi$  déterminent l'espace  $\mathbf{A} \equiv (a\pi)$ . On peut considérer le point  $a$  dans l'espace  $\mathbf{A}$  et on parvient à la méthode élémentaire de projection. Les centres de projection sont les points impropres des rayons projetants  $(aa_1)$  et  $(aa_2)$ . Cela nous permet aussitôt de trouver la distance  $\overline{aa_2}$  du point  $a$  et du plan  $\pi$ . On l'obtient en rabattant le triangle  $aa_2a_1$  dans  $\pi$ .

2. — *Positions exceptionnelles.* Les projections du point  $a$  se confondent en  $a$ , si ce point se trouve dans  $\pi$ . ( $a_1 \equiv a_2 \equiv a$ ).

Soit  $u$  un point impropre dans l'unique espace impropre  $({}^1C{}^2C)$ . Les projections  $\underline{u}_1, \underline{u}_2$  sur  ${}^0C$  ne le déterminent pas d'une manière uniforme, parce que les plans  $({}^1Cu)$  et  $({}^2Cu)$  se rencontrent suivant une droite  $D$ . En ce cas  $\underline{u}_i$  est la  $i$ -ième projection de chaque point sur  $D$ . Les rayons projetants  ${}^iC$  de  ${}^hC$  engendrent un parabolôïde hyperbolique. Si  $u$  est situé sur une génératrice projetante de ce parabolôïde, on a  $\underline{u}_i \equiv \underline{u}_k$ . Le point  $u$  sur  ${}^iC$  n'a pas la  $i$ -ième projection.

Pour la distance de deux points voir III, 3.

## III. — DROITE.

1. — Une droite quelconque  $A$  et la droite  ${}^iC$  déterminent une figure linéaire. La trace de cette figure sur  $\pi$  sera dite la  $i$ -ième projection  $A_i$  de la droite  $A$ . En supposant les droites  $A$ ,  ${}^1C$ ,  ${}^2C$ , non sécantes, on obtient les droites  $A_i$ .  $A_1$  et  $A_2$  ne déterminent pas  $A$  d'une manière uniforme, car les espaces  $({}^1CA)$  et  $({}^2CA)$  se rencontrent suivant un plan.

*La projection  $A_i$  d'une droite  $A$  est une droite en général, mais les projections  $A_1$ ,  $A_2$  ne déterminent pas la droite d'une manière uniforme.*

Supposons une série linéaire  $A(a, b, \dots)$  des points sur  $A$ . Les rayons projetants  $(aa_i)$ ,  $(bb_i)$ ,  $(cc_i)$ , ... qui sont en général des génératrices d'une quadrique gauche, font correspondre à  $A(a, b, \dots)$  une série projective  $A_i(a_i, b_i, \dots)$  [ $A(a, b, \dots) \overline{\wedge} A_i(a_i, b_i, \dots)$ ]. Or, parce qu'on a  $A(a, b, \dots) \overline{\wedge} A_1(a_1, b_1, \dots)$  et  $A(a, b, \dots) \overline{\wedge} A_2(a_2, b_2, \dots)$ , il s'en suit aussi

$$A_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} A_2(a_2, b_2, c_2, \dots).$$

L'enveloppe des droites de rappel  $(a_1, a_2)$ ,  $(b_1, b_2)$ ,  $(c_1, c_2)$ , ... est donc une conique, mais, parce que les projections du point impropre de  $A$  sont à l'infini, cette conique est une parabole:

*A chaque droite  $A$  appartient une parabole  $P_A$ , enveloppe des rayons de rappel  $(a_1 a_2)$ ,  $(b_1 b_2)$ ,  $(c_1 c_2)$ , ... Les projections  $A_1$ ,  $A_2$  et la parabole  $P_A$  déterminent la droite d'une manière uniforme.*

2. — *Positions exceptionnelles.*

A. *Droite sécante  ${}^iC$ .* En ce cas la  $i$ -ième projection de  $A$  est un point  $A_i$  qui est la trace du plan  $({}^iCA)$  sur  $\pi$ . On a donc pour  $i = 2$ : *La deuxième projection d'une droite  $A$ , orthogonale à  $\pi$  est un point  $A_2$ .*

B. *Droite sécante  $\pi$ .* L'espace  $\mathbf{A} \equiv (A\pi)$ , a un point commun  ${}^ic$  avec  ${}^iC$ . On peut donc appliquer la méthode élémentaire de projection à l'aide de deux centres impropres  ${}^1c$ ,  ${}^2c$ . ( ${}^1c_2 \equiv {}^2c_1$ ).

*La parabole appartenant à une droite sécante  $\pi$  dégénère en un faisceau de rayons parallèles.*

C. *Droite impropre.* Supposons tout d'abord une droite  $A$  qui ne rencontre ni  ${}^1C$  ni  ${}^2C$ . Dans ce cas on a

$$\underline{A}_1(\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{c}_1, \dots) \overline{\wedge} \underline{A}_2(\underline{a}_2, \underline{b}_2, \underline{c}_2, \dots) \text{ sur } {}^0C.$$

Chacun de deux points doubles de ces deux séries représente les projections confondues d'une sécante aux quatre droites  $A, {}^2C, {}^1C, {}^0C$ .

La  $i$ -ième projection d'une droite  $A$  qui s'appuie sur  ${}^iC$  est le point d'intersection de deux plans  $(A {}^iC)$  et  $\pi$ . La série  $\underline{A}_i(a_i, b_i, c_i \dots)$  se réduit au point  $\underline{A}_i$ . Une droite  $A$  qui s'appuie et sur  ${}^1C$  et sur  ${}^2C$  ne nous présente que deux points  $\underline{A}_1, \underline{A}_2$  distincts, si elle n'est pas une des droites projetantes, confondues dans le cas contraire.

3. — Deux droites  $A$  et  $A'$  sont concourantes au point  $x$ , si le rayon de rappel  $(x_1 x_2) [x_i \equiv A_i A'_i]$  est tangent aux paraboles  $P_A$  et  $P_{A'}$ . Il s'en suit pour deux droites parallèles d'après II.2:

*Deux droites sont parallèles, lorsque leurs projections du même nom sont parallèles.* On se sert de ce théorème pour résoudre facilement le problème de la distance de deux points  $a, b$  sur  $A$ . On mène une droite  $A' // A$  par un point quelconque de  $\pi$ , et on projette parallèlement la série  $A(a, b, \dots)$  sur  $A'(a', b', \dots)$ . Maintenant on peut procéder sur  $A'$  dans l'espace  $(A' \pi)$  ce qui est un problème élémentaire.

Deux droites  $A, B$ , dont  $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2$ , sont situées dans un même plan. Ce plan est l'intersection de deux espaces  $({}^1CA) \equiv ({}^1CB)$  et  $({}^2CA) \equiv ({}^2CB)$ . La quatrième tangente commune de deux paraboles  $P_A, P_B$  est le rayon de rappel  $(x_1 x_2)$  du point d'intersection  $x \equiv (AB)$ .

Deux droites  $A, B, A_1 \not\equiv B_1, A_2 \not\equiv B_2$  avec la parabole commune  $P_{AB}$  n'ont aucun point commun.

4. — *Deux droites impropres.* Le cas échéant on a

$$\begin{aligned} \underline{A}_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} \underline{A}_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \\ \underline{A}'_1(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \bar{\wedge} \underline{A}'_2(a'_2, b'_2, c'_2, \dots) \end{aligned} \text{ sur } {}^0C .$$

Or, en posant

$$\underline{A}_i(a_i, b_i, c_i, \dots) \equiv \underline{A}'_i(a'_i, b'_i, c'_i, \dots)$$

on obtient

$$\underline{A}_k(a_k, b_k, c_k, \dots) \bar{\wedge} \underline{A}'_k(a'_k, b'_k, c'_k, \dots) .$$

Chacun de deux points doubles de ces deux séries projectives représente la  $k$ -ième projection d'une de deux sécantes communes

à quatre droites ( $\overline{AA'^kC^0C}$ ). Si  $\underline{A}$  et  $\underline{A}'$  sont concourantes, on ne peut mener qu'une sécante commune à ( $\overline{AA'^kC^0C}$ ). Sa  $k$ -ième projection est en même temps la  $k$ -ième projection du point d'intersection  $\underline{x} \equiv (\overline{AA'})$ . Les séries mentionnées sont liées par la projectivité parabolique, parce qu'elles n'ont qu'un point double  $\underline{x}_k$ .

Si les droites  $\underline{A}$  et  $\underline{A}'$  sont concourantes, les séries  $\overline{A_k}(\underline{a}_k, \underline{b}_k, \underline{c}_k, \dots) \wedge \overline{A'_k}(\underline{a}'_k, \underline{b}'_k, \underline{c}'_k, \dots)$  sont paraboliquement projectives.

#### IV. — PLAN.

1. — *Triangle caractéristique.* Désignons par  $\alpha_i$  la  $i$ -ième projection du plan  $\alpha$ , c'est-à-dire l'ensemble de  $i$ -ièmes projections de tous ses points. Le plan  $\alpha$  est déterminé par deux droites  $D, D'$  concourantes au point  $p$ . Nous avons démontré (III, 1) la relation

$$\begin{aligned} D'_1(\underline{a}'_1, \underline{b}'_1, \underline{c}'_1, \dots, \underline{p}_1, \dots) \wedge D'_2(\underline{a}'_2, \underline{b}'_2, \underline{c}'_2, \dots, \underline{p}_2, \dots) \\ D_1(\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{c}_1, \dots, \underline{p}_1, \dots) \wedge D_2(\underline{a}_2, \underline{b}_2, \underline{c}_2, \dots, \underline{p}_2, \dots) \end{aligned} \quad \text{Il s'en suit } \alpha_1 \wedge \alpha_2.$$

Les champs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont projectifs. On a donc trois points doubles (distincts en général):  $x_{12}, y_{12}, z_{12}$ . Nous appelons le triangle  $x_{12} y_{12} z_{12}$  *triangle caractéristique* du plan  $\alpha$ . Deux de ses sommets sont à l'infini. Ils nous représentent les projections (confondues) de deux sécantes communes à  $\overline{A^0C^1C^2C}$  ( $\underline{A}$  est droite impropre du plan  $\alpha$ ). Le troisième  $\underline{x} \equiv \underline{x}_1 \equiv \underline{x}_2$  est le point d'intersection de deux plans  $\pi$  et  $\alpha$ .

La droite  $\underline{X}_i \equiv (\underline{y}_i \underline{z}_i)$  est en même temps la  $i$ -ième projection de la congruence linéaire de droites qui s'appuient sur les rayons projetants des points  $\underline{y}$  et  $\underline{z}$ . Il s'en suit que le triangle  $\underline{x} \underline{y}_{12} \underline{z}_{12}$  ne détermine pas d'une manière uniforme le plan  $\alpha$ . Il nous faut encore un point quelconque pour le déterminer. La droite  $(ax)$  a un point commun avec l'espace ( ${}^1C^2C$ ). On mène par ce point l'unique rayon possible de la congruence mentionnée et on le considère comme rayon impropre du plan  $\alpha$ :

Le plan est fixé par le triangle caractéristique  $x_{12}, y_{12}, z_{12}$  et un de ses points.

Indiquons par  $\underline{X}_{12}, \underline{Y}_{12}, \underline{Z}_{12}$ , les droites  $(\underline{y}_{12}, \underline{z}_{12}), (z_{12}, x_{12}),$

$(x_{12}, y_{12})$ . Chaque droite  $D$  de  $\alpha$  rencontre  $\underline{X}$  ( $\underline{Y}$ ,  $\underline{Z}$ ) en un point  $x'$  ( $y'$ ,  $z'$ ). Le rayon de rappel du point  $x'$  ( $y'$ ,  $z'$ ) est sur  $\underline{X}_{12}$  ( $\underline{Y}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{12}$ ). Il s'en suit que la parabole  $\overline{P}_D$  est inscrite au triangle  $x_{12} y_{12} z_{12}$ :

*Toutes les paraboles de toutes les droites du plan donné sont inscrites au triangle caractéristique de ce plan.*

2. — *Positions exceptionnelles.* — A. Si les plans  $\alpha$ ,  $\pi$ , se rencontrent suivant une droite  $D$ , on parvient à la méthode élémentaire de projection avec les centres impropres qui sont points d'intersections de l'espace ( $\alpha \pi$ ) et  ${}^1C$  resp.  ${}^2C$ . Le triangle caractéristique a une droite double  $D_{12}$ .

B. Si le plan et la droite  ${}^iC$  se rencontrent au point  ${}^iC$ , la  $i$ -ième projection  $\alpha_i$  est la droite  $\overline{\alpha}_i$ . La  $i$ -ième projection du plan contenant  ${}^iC$  est le point  $\alpha_i$ . Spécialement pour  $i \equiv 2$ :

*La 2-ième projection du plan complètement orthogonal à  $\pi$  est le point  $\alpha_i$ .*

En combinant les cas ci-dessus énumérés, on obtient les positions diverses, d'ailleurs sans difficulté quant à leurs projections.

3. — *Point et plan.* Soit donné le plan  $\alpha$  par le triangle  $x_{12} y_{12} z_{12}$  et par un de ses points  $a$ . On a à trouver le point  $b$  de  $\alpha$  dont la  $i$ -ième projection est donnée. On résout ce problème en trouvant dans  $\alpha_k$  le point  $b_k$  appartenant à  $b_i$  dans  $\alpha_i$ . On peut se servir du triangle  $x_{12} y_{12} z_{12}$ , en tenant compte du fait que les séries de points sur  $\underline{X}$  ( $\underline{Y}$ ,  $\underline{Z}$ ) se projettent suivant deux séries projectives sur  $\underline{X}_{12}$  ( $\underline{Y}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{12}$ ) avec les points doubles  $y_{12}$ ,  $z_{12}$  ( $z_{12}$ ,  $x_{12}$ ;  $x_{12}$ ,  $y_{12}$ ).

4. — *Droite et plan.* On a maintenant trois problèmes à résoudre. A. Trouver la  $k$ -ième projection d'une droite  $D$  de  $\alpha$ , si  $D_i$  est donnée. B. Trouver la droite  $D$  dans  $\alpha$ , dont la parabole est donnée. C. Trouver le point d'intersection  $p$  (s'il existe) du plan  $\alpha$  et de la droite B.

A. Ce problème peut être résolu de la manière analogue à IV, 3.

B. On peut considérer la parabole  $P_D$  (inscrite au triangle  $x_{12} y_{12} z_{12}$ ) comme enveloppe des droites  $D_i$  dans  $\alpha_i$ . A la parabole ainsi conçue correspond dans  $\alpha_k$  la parabole  $P'_D$ , enveloppe des droites  $D_k$ . Cette parabole est de même inscrite au triangle  $x_{12} y_{12} z_{12}$ , parce qu'à la droite  $\underline{X}_i$  ( $\underline{Y}_i$ ,  $\underline{Z}_i$ ) dans  $\alpha_i$  correspond la

droite  $\overline{X_k}(Y_k, Z_k)$  dans  $\alpha_k$ . La dernière tangente commune des paraboles  $\overline{P_D}$  et  $\overline{P'_D}$  est la droite  $D_k$ . On procède ensuite d'après IV, 4, A.

C. Il y a assurément dans  $\alpha$  une droite  $D$  telle que l'on ait  $D_i \equiv B_i$ . Si le point d'intersection  $x$  existe,  $x_k$  doit être situé sur  $D_k$ , parce que sa  $i$ -ième projection doit se trouver sur  $B_i$ . Or si les deux droites  $D$  et  $B$  se rencontrent, leur point d'intersection représente le point cherché (III, 3). Si elles ne se rencontrent pas, le point d'intersection n'existe pas.

5. — *Deux plans*. Quant à la position mutuelle de deux plans, nous distinguerons les plans *concourants*, situés dans un même espace et les plans *sécants*, qui n'y sont pas. Les premiers sont toujours *demi-parallèles*, les autres ne le sont que si leur point commun est à l'infini.

Soient donnés deux plans sécants  $\alpha$  et  $\alpha'$ , non demiparallèles. Nous avons démontré (IV, 1) les relations  $\alpha_1 \overline{\wedge} \alpha_2$  et  $\alpha'_1 \overline{\wedge} \alpha'_2$ . Or, en posant  $\alpha_i \equiv \alpha_i$ , on obtient  $\alpha_k \overline{\wedge} \alpha'_k$ . Ces champs projectifs ont trois points doubles (distincts en général), dont deux, situés à l'infini, représentent les  $k$ -ièmes projections de deux sécantes communes à  $\underline{AA'}^k \underline{C^0C}$ . ( $\underline{A}$  et  $\underline{A'}$  sont droites impropres des plans  $\alpha$  et  $\alpha'$  (III, 4)).

Le troisième point double est la  $k$ -ième projection du point d'intersection de  $\alpha$  et  $\alpha'$ . Pour le fixer on lui trouve le point correspondant dans  $\alpha_i$  d'après IV, 3. Si les plans sécants sont demi-parallèles, les trois points doubles se confondent en un seul point impropre (III, 4, fin).

Si les deux plans demiparallèles sont concourants, on peut trouver d'une autre manière la droite d'intersection. La parabole inscrite au quadrilatère  $Y_{12}Z_{12}Y'_{12}Z'_{12}$  ( $\underline{X}_{12}Y_{12}Z_{12}$  et  $\underline{X'_{12}}Y'_{12}Z'_{12}$  sont les triangles caractéristiques de  $\alpha$  et  $\alpha'$ ) appartient à la droite cherchée. En la trouvant d'après IV, 4, B, on a trouvé la droite d'intersection des plans  $\alpha$  et  $\alpha'$ .

En résumé: *Les plans sont sécants, non demiparallèles, si les trois points doubles (mentionnés plus haut) sont distincts. Ils sont demiparallèles, si ces trois points se confondent en un seul point à l'infini. Ils sont concourants, si la parabole inscrite au quadrilatère  $Y_{12}Z_{12}Y'_{12}Z'_{12}$  appartient à une seule droite dans  $\alpha$  et  $\alpha'$ . En ce cas, cette droite est leur droite d'intersection.*



V. — ESPACE.

1. — *Triangle impropre.* On a trois points remarquables  ${}^0c, {}^1c, {}^2c$ , dans chaque espace  $\mathbf{A}$ . Ce sont les points d'intersections  $({}^0\overline{\mathbf{CA}}), ({}^1\overline{\mathbf{CA}}), ({}^2\overline{\mathbf{CA}})$ . Ils déterminent le plan impropre de l'espace  $\mathbf{A}$ .  ${}^0c$  est le point impropre de la trace  $T$  de  $\mathbf{A}$  sur  $\pi$ . On l'obtient, en joignant deux traces  $x, x'$  de deux plans  $\alpha, \alpha'$  de  $\mathbf{A}$  (IV, 1). Le point  ${}^ic$  n'a pas sa  $i$ -ième projection (II, 2). Pour le trouver, on cherche la droite d'intersection  $D$  des plans  $({}^ic\overline{\mathbf{T}})$  et  $\alpha$ . Sa  $i$ -ième projection  $D_i$  est sur  $T$ , parce que le plan  $({}^ic\overline{\mathbf{T}})$  passe par  ${}^ic$  (IV, 2, A). On trouve d'après IV, 4, A sa  $k$ -ième projection dans  $\alpha_k$ . Parce que la droite cherchée rencontre  $\pi$ , les rayons de rappels de ses points passent par  ${}^ic_k$  (III, 2, B). C'est la  $k$ -ième projection du centre de projection  ${}^ic$  pour la droite  $D$ . Nous appelons  ${}^0c{}^1c{}^2c$  *triangle impropre* de l'espace  $\mathbf{A}$ .

2. — *Positions exceptionnelles.* — A.  $\mathbf{A}$  contient  $\pi$ . Alors les projections  ${}^ic_k$  et  ${}^kc_i$  se confondent. C'est donc la méthode élémentaire de projection avec les centres à l'infini.

B.  $\mathbf{A}$  contient  ${}^i\overline{\mathbf{C}}$ . Dans ce cas, sa trace  $T_i$  est sa  $i$ -ième projection. Spécialement pour  $i = 2$ :

*La deuxième projection de l'espace demiorthogonal à  $\pi$  est une droite.*

C.  $\mathbf{A}$  contient  ${}^1\overline{\mathbf{C}}$  et  ${}^2\overline{\mathbf{C}}$ . Il est donc l'unique espace impropre de l'hyperespace.

3. — *Point et espace.* Soit donné un point quelconque  $p_i$  dans  $\pi$ . Le plan  $({}^i\overline{\mathbf{C}}p)$  et l'espace donné  $\mathbf{A}$  se rencontrent suivant une droite  $P$  qui passe par  ${}^ic$ .  $p_i$  est donc la  $i$ -ième projection d'une droite  $P$  de  $\mathbf{A}$ , passant par  ${}^ic$ . Or, il nous faut encore un de ses points pour la connaître. Le plus facile est de déterminer le point d'intersection  $p'$  de  $P$  et du plan  $({}^k\overline{\mathbf{C}}\mathbf{T})$ , parce que sa  $k$ -ième projection se trouve sur  $T_k$ . Le point d'intersection de  $T_{12}$  et de  $({}^k\overline{\mathbf{C}}_i p_i)$  nous livre  $p'_k$ .  $P_k \equiv ({}^ic_k p'_k)$ .

Toutes les droites  $P_k$  sont parallèles.

4. — *Droite et espace.* Trouvons la  $k$ -ième projection  $D_k$  d'une droite  $D$  de  $\mathbf{A}$ , si  $D_i$  est donnée. Il suffit de répéter deux fois la construction de V, 3, pour deux points  $a$  et  $b$ , sur  $D$ . Il s'en suit aussitôt que chaque droite de  $\pi$  peut être considérée comme la

$k$ -ième projection  $D_k$  appartenant à  $D_i$ , pourvu que l'on fasse correspondre à deux points  $a_i$  et  $b_i$  de  $D_i$  les points  $a_k$  et  $b_k$  sur  $D_k$  d'après V, 3.

Grâce à cette méthode, on peut facilement trouver le point d'intersection d'une droite quelconque  $E$  et de l'espace  $\mathbf{A}$ . On trouve, d'après la méthode que nous venons d'expliquer, une droite  $D$  dans  $\mathbf{A}$  telle que l'on a  $E_1 \equiv D_1$  et  $E_2 \equiv D_2$ . Les droites  $E$  et  $D$  se rencontrent au point cherché (III, 3).

5. — *Plan et espace. Deux espaces.* Pour trouver l'intersection de ces deux figures linéaires, on procède d'après la méthode précédente et on détermine ainsi le nombre nécessaire des points communs à ces deux figures linéaires.

6. — *Constructions auxiliaires* pour résoudre les problèmes non métriques dans  $\mathbf{A}$ . On peut projeter l'espace  $\mathbf{A}$  d'un point  $o$  quelconque (non situé dans  $\mathbf{A}$ ) sur un espace  $\mathbf{A}'$  contenant  $\pi$ . Grâce à cette projection on parvient à la méthode élémentaire de projection sur  $\pi$ . Soit donc  $\mathbf{A} \equiv (a^2c^1c^0c)$  l'espace à projeter,  $\mathbf{A}' \equiv ({}^1c', {}^2c' \pi)$  l'espace de projection et  $o$  sur  ${}^iC$  le centre de projection. Chaque point  $a$  de  $\mathbf{A}$  a  $a_i \equiv \overline{a'_i}$ , si  $a'$  désigne le point projeté sur  $\mathbf{A}'$ . Le point  $a'$  se trouve sur  $P \equiv (oa)$ . Mais, parce qu'il est aussi dans  $\mathbf{A}'$ , le point d'intersection des rayons  $(a'_i, {}^i c'_k)$  et  $P_k$  nous représente  $a'_k$ . Pour projeter un point quelconque  $a'$  de  $\mathbf{A}'$  sur  $\mathbf{A}$ , il faut trouver la droite  $A_k$  appartenant à  $a_i$  dans  $\mathbf{A}$  (V, 3). L'intersection de cette droite avec  $P_k \equiv (o_k a'_k)$  nous donne  $a_k$ . On approuve facilement le théorème suivant: *Le plan d'intersection des espaces  $\mathbf{A}$  et  $(o \pi)$  se projette en  $\pi$ .*

Pour résoudre un problème nonmétrique dans  $\mathbf{A}$ , on le projette sur  $\mathbf{A}'$  et on y effectue la résolution. On fait ensuite projeter la figure cherchée sur  $\mathbf{A}$ , d'après la méthode ci-dessus exposée.

## VI. — ORTHOGONALITÉ.

1. — *Notes préliminaires.* Soient  $\underline{A}$  et  $\underline{A}'$  les droites impropres de deux plans  $\alpha, \alpha'$ . Pour trouver les angles extrêmes d'inclinaison de ces deux plans, il faut trouver d'abord deux sécantes  $\underline{B}, \underline{B}'$  à  $\underline{A}, \underline{A}'$  qui soient conjuguées par rapport à la sphère absolue. Ce sont les droites impropres de deux plans complètement orthogonaux  $\beta$  et  $\beta'$ , demiparallèles et demiorthogonaux à

$\alpha$  et  $\alpha'$ . Les droites  $(\alpha\beta)$ ,  $(\alpha'\beta)$  et  $(\alpha\beta')$ ,  $(\alpha'\beta')$  déterminent les angles cherchés. Si ces angles sont de la même valeur, il y a  $\infty^1$  sécantes  $\underline{B}$ ,  $\underline{B}'$  et les angles obtenus à l'aide des  $\infty^1$  plans  $\underline{\beta}$ ,  $\underline{\beta}'$  sont tous de la même valeur. Or, en faisant  $\underline{A} \equiv \underline{{}^1C}$  et  $\underline{A}' \equiv \underline{{}^0C}$ , les  $\infty^1$  sécantes mentionnées se réduisent aux rayons projetants, qui rencontrent  $\underline{{}^0C}\underline{{}^1C}$  et  $\underline{{}^2C}$  aux points  $\underline{{}^0c}$ ,  $\underline{{}^0c^*}$ ,  $\underline{{}^1c}$ ,  $\underline{{}^1c^*}$  et  $\underline{{}^2c}$ ,  $\underline{{}^2c^*}$ . Les points  $\underline{{}^0c}$  et  $\underline{{}^0c^*}$  étant conjugués par rapport à la sphère absolue, on les projette d'un point quelconque de  $\pi$  par des rayons orthogonaux. On a aussi

$$\underline{{}^0c} \equiv \underline{{}^1c_2} \equiv \underline{{}^2c_1} \quad \text{et} \quad \underline{{}^0c^*} \equiv \underline{{}^1c_2^*} \equiv \underline{{}^2c_1^*} .$$

2. — *Espace orthogonal à une droite.* Tous les problèmes de l'orthogonalité peuvent être réduits au problème de détermination de l'espace (de la droite) orthogonal (—e) à la droite (à l'espace). L'essentiel dans ce problème est de déterminer les éléments impropres de la figure cherchée. Or, pour trouver l'espace **A** orthogonal à la droite A, il suffit de considérer une droite  $\underline{A}' // \underline{A}$  par un point  $\underline{a}'$  quelconque de  $\pi$ . Désignons par **A'** l'espace  $\underline{A}' \equiv (\pi \underline{A}')$ . **A'** rencontre  $\underline{{}^1C}$  et  $\underline{{}^2C}$  aux points  $\underline{{}^1c'}$  et  $\underline{{}^2c'}$ ,  $\underline{{}^1c'_2} \equiv \underline{{}^2c'_1}$  (V, 2, A).

Le plan impropre de **A** est fixé par trois points. Nous en trouvons le point d'intersection  $(\underline{A}\underline{{}^2C}) \equiv \underline{{}^2c}$ .  $\underline{{}^2c}$  est conjugué à  $\underline{{}^2c'}$  par rapport à la sphère absolue. C'est le point impropre des droites orthogonales à **A'** (et pour cette raison aussi à A'). D'après VI, 1, les points  $\underline{{}^2c_1}$  et  $\underline{{}^2c'_1}$  sont de même conjugués par rapport à la sphère absolue. On a donc  $(\underline{{}^2c'_1}\underline{a}'_1) \perp (\underline{{}^2c_1}\underline{a}'_1)$ .

Deux autres points impropres de l'espace cherché sont situés sur la droite impropre du plan  $\alpha'$ , orthogonal à A' dans **A'**. On les trouve par la méthode élémentaire de projection dans **A'**. L'un d'eux,  $\underline{{}^0c}$ , est le point impropre  $\underline{{}^0c}$  de la trace T' du plan  $\alpha'$ . En résumé:

*Le plan impropre de l'espace  $\underline{A} \perp \underline{A}$  est fixé par trois points  $\underline{{}^0c}$ ,  $\underline{{}^2c}$ ,  $\underline{p}$ .  $\underline{{}^0c}$  est le point impropre de la trace  $\underline{T}_{12} \perp \underline{A}_2$  de l'espace cherché, la projection  $\underline{{}^2c_1}$  est conjuguée par rapport à la sphère absolue à  $\underline{{}^2c'_1}$   $(\underline{{}^2c'_1}\underline{a}'_1) \perp (\underline{{}^2c_1}\underline{a}'_1)$ , et  $\underline{p}$  est le point quelconque impropre du plan  $\alpha' \perp \underline{A}'$  dans **A'**.*

3. — *Droite orthogonale à l'espace.* (Nous conservons la nomenclature de l'article précédent.) Il ne s'agit que de la position de

la droite  $A$ . On obtient d'abord le point  ${}^2c'$  par la construction  $({}^2c_1 a_1) \perp ({}^2c'_1 a'_1)$ . On trouve ensuite le plan commun  $\alpha'$  de deux espaces  $A$  et  $A' \equiv ({}^2c' \pi)$ . Une droite  $A' \perp \alpha'$  dans  $A'$  nous présente le résultat cherché. On peut faciliter la construction, en se servant du fait que l'on a  $A'_2 \perp T_{12}$ .

4. — *Problèmes spéciaux*. Pour trouver le plan complètement orthogonal à un plan donné, il suffit de trouver deux espaces, orthogonaux à deux droites du plan donné. L'intersection de ces deux espaces nous donne le résultat cherché. Comme celui-ci, tous les autres problèmes spéciaux touchant l'orthogonalité de deux figures linéaires peuvent être résolus à l'aide de VI, 2, 3. Il s'en suit que les problèmes métriques trouvent leurs solutions à l'aide de la méthode ci-dessus exposée. Nous ne jugeons pas nécessaire de nous étendre sur le développement des solutions spéciales. Le lecteur intéressé les trouve en abondance dans mon article tchèque, publié en 1922 dans le « Časopis pro pěstování matematiky a fysiky », T. LII<sup>1</sup>.

Remarquons encore que la méthode exposée est un cas spécial de la méthode de projection de l'hyperespace linéaire à cinq dimensions sur un plan à l'aide *de trois projections seulement*, que j'ai exposée dans le même périodique tchèque en 1923, T. LIII<sup>2</sup>.

Prague, février 1925.

---

<sup>1</sup> « Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném ».

<sup>2</sup> « Promítání z roviny na rovinu prostoru pětirozměrného ».