VI. — Orthogonalité.

k-ième projection D_k appartenant à D_i, pourvu que l'on fasse correspondre à deux points a_i et b_i de D_i les points a_k et b_k sur D_k d'après V, 3.

Grâce à cette méthode, on peut facilement trouver le point d'intersection d'une droite quelconque E et de l'espace **A**. On trouve, d'après la méthode que nous venons d'expliquer, une droite D dans **A** telle que l'on a $E_1 \equiv D_1$ et $E_2 \equiv D_2$. Les droites E et D se rencontrent au point cherché (III, 3).

5. — *Plan et espace. Deux espaces.* Pour trouver l'intersection de ces deux figures linéaires, on procède d'après la méthode précédente et on détermine ainsi le nombre nécessaire des points communs à ces deux figures linéaires.

6. — *Constructions auxiliaires* pour résoudre les problèmes non métriques dans **A**. On peut projeter l'espace **A** d'un point o quelconque (non situé dans **A**) sur un espace **A**$'$ contenant π. Grâce à cette projection on parvient à la méthode élémentaire de projection sur π. Soit donc $\mathbf{A} \equiv (\underline{a}\,{}^2\underline{c}\,{}^1\underline{c}\,{}^0\underline{c})$ l'espace à projeter, $\mathbf{A}' \equiv ({}^1\underline{c}', {}^2\underline{c}'\,\pi)$ l'espace de projection et $\underline{o}$ sur ${}^i\underline{C}$ le centre de projection. Chaque point a de **A** a $a_i \equiv a'_i$, si a' désigne le point projeté sur **A**$'$. Le point a' se trouve sur $P \equiv (\underline{o}a)$. Mais, parce qu'il est aussi dans **A**$'$, le point d'intersection des rayons $(a'_i\,{}^i\underline{c}'_k)$ et P_k nous représente a'_k. Pour projeter un point quelconque a' de **A**$'$ sur **A**, il faut trouver la droite A_k appartenant à a_i dans **A** (V, 3). L'intersection de cette droite avec $P_k \equiv (\underline{o}_k\,a'_k)$ nous donne a_k. On approuve facilement le théorème suivant: *Le plan d'intersection des espaces* **A** *et* $(\underline{o}\,\pi)$ *se projette en* π.

Pour résoudre un problème nonmétrique dans **A**, on le projette sur **A**$'$ et on y effectue la résolution. On fait ensuite projeter la figure cherchée sur **A**, d'après la méthode ci-dessus exposée.

VI. — ORTHOGONALITÉ.

1. — *Notes préliminaires.* Soient $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ les droites impropres de deux plans α, α'. Pour trouver les angles extrêmes d'inclinaison de ces deux plans, il faut trouver d'abord deux sécantes $\underline{B}$, $\underline{B}'$ à $\underline{A}$, $\underline{A}'$ qui soient conjuguées par rapport à la sphère absolue. Ce sont les droites impropres de deux plans complètement orthogonaux β et β', demiparallèles et demiorthogonaux à

α et α'. Les droites $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta)$ et $(\alpha\beta')$, $(\alpha'\beta')$ déterminent les angles cherchés. Si ces angles sont de la même valeur, il y a ∞^1 sécantes $\underline{B}$, $\underline{B}'$ et les angles obtenus à l'aide des ∞^1 plans β, β' sont tous de la même valeur. Or, en faisant $\underline{A} \equiv {}^1\underline{C}$ et $\underline{A}' \equiv {}^0\underline{C}$, les ∞^1 sécantes mentionnées se réduisent aux rayons projetants, qui rencontrent ${}^0\underline{C}\,{}^1\underline{C}$ et ${}^2\underline{C}$ aux points ${}^0\underline{c}$, ${}^0\underline{c}^*$, ${}^1\underline{c}$, ${}^1\underline{c}^*$ et ${}^2\underline{c}$, ${}^2\underline{c}^*$. Les points ${}^0\underline{c}$ et ${}^0\underline{c}^*$ étant conjugués par rapport à la sphère absolue, on les projette d'un point quelconque de π par des rayons orthogonaux. On a aussi

$$ {}^0\underline{c} \equiv {}^1\underline{c}_2 \equiv {}^2\underline{c}_1 \qquad \text{et} \qquad {}^0\underline{c}^* \equiv {}^1\underline{c}^*_2 \equiv {}^2\underline{c}^*_1 \, . $$

2. — *Espace orthogonal à une droite.* Tous les problèmes de l'orthogonalité peuvent être réduits au problème de détermination de l'espace (de la droite) orthogonal (—e) à la droite (à l'espace). L'essentiel dans ce problème est de déterminer les éléments impropres de la figure cherchée. Or, pour trouver l'espace **A** orthogonal à la droite A, il suffit de considérer une droite A' / / A par un point a' quelconque de π. Désignons par **A**' l'espace **A**' $\equiv (\pi A')$. **A**' rencontre ${}^1\underline{C}$ et ${}^2\underline{C}$ aux points ${}^1\underline{c}'$ et ${}^2\underline{c}'$, ${}^1\underline{c}'_2 \equiv {}^2\underline{c}'_1$ (V, 2, A).

Le plan impropre de **A** est fixé par trois points. Nous en trouvons le point d'intersection $(\mathbf{A}\,{}^2\underline{C}) \equiv {}^2\underline{c}$. ${}^2\underline{c}$ est conjugué à ${}^2\underline{c}'$ par rapport à la sphère absolue. C'est le point impropre des droites orthogonales à **A**' (et pour cette raison aussi à A'). D'après VI, 1, les points ${}^2\underline{c}_1$ et ${}^2\underline{c}'_1$ sont de même conjugués par rapport à la sphère absolue. On a donc $({}^2\underline{c}'_1 a'_1) \perp ({}^2\underline{c}_1 a'_1)$.

Deux autres points impropres de l'espace cherché sont situés sur la droite impropre du plan α', orthogonal à A' dans **A**'. On les trouve par la méthode élémentaire de projection dans **A**'. L'un d'eux, ${}^0c$, est le point impropre ${}^0\underline{c}$ de la trace T' du plan α'. En résumé:

Le plan impropre de l'espace **A** $\perp$ A *est fixé par trois points* ${}^0\underline{c}$, ${}^2\underline{c}$, $\underline{p}$. ${}^0\underline{c}$ *est le point impropre de la trace* $T_{12} \perp A_2$ *de l'espace cherché, la projection* ${}^2\underline{c}_1$ *est conjuguée par rapport à la sphère absolue à* ${}^2\underline{c}'_1$ $({}^2\underline{c}_1 a'_1) \perp ({}^2\underline{c}_1 {}^1a'_1)$, *et* $\underline{p}$ *est le point quelconque impropre du plan* $\alpha' \perp$ A' *dans* **A**'.

3. — *Droite orthogonale à l'espace.* (Nous conservons la nomenclature de l'article précédent.) Il ne s'agit que de la position de

la droite A. On obtient d'abord le point ${}^2\underline{c}'$ par la construction $({}^2\underline{c}_1 a'_1) \perp ({}^2\underline{c}'_1 a'_1)$. On trouve ensuite le plan commun α' de deux espaces **A** et $\mathbf{A}' \equiv ({}^2c'\pi)$. Une droite $A' \perp \alpha'$ dans **A'** nous présente le résultat cherché. On peut faciliter la construction, en se servant du fait que l'on a $A'_2 \perp T_{12}$.

4. — *Problèmes spéciaux.* Pour trouver le plan complètement orthogonal à un plan donné, il suffit de trouver deux espaces, orthogonaux à deux droites du plan donné. L'intersection de ces deux espaces nous donne le résultat cherché. Comme celui-ci, tous les autres problèmes spéciaux touchant l'orthogonalité de deux figures linéaires peuvent être résolus à l'aide de VI, 2, 3. Il s'en suit que les problèmes métriques trouvent leurs solutions à l'aide de la méthode ci-dessus exposée. Nous ne jugeons pas nécessaire de nous étendre sur le développement des solutions spéciales. Le lecteur intéressé les trouve en abondance dans mon article tchèque, publié en 1922 dans le « Časopis pro pěstování matematiky a fysiky », T. LII [1].

Remarquons encore que la méthode exposée est un cas spécial de la méthode de projection de l'hyperespace linéaire à cinq dimensions sur un plan à l'aide *de trois projections seulement*, que j'ai exposée dans le même périodique tchèque en 1923, T. LIII [2].

Prague, février 1925.

---

[1] « Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném ».
[2] « Promítání z roviny na rovinu prostoru pětirozměrného ».