§ 1. DÉFINITIONS.

Ainsi délimité mon sujet est encore très étendu et je devrai me borner aux points essentiels. Les progrès les plus importants de la théorie des séries trigonométriques sont dus au développement considérable de la théorie des fonctions de variables réelles; je chercherai à vous montrer qu'ils sont dus plus particulièrement à l'introduction de l'intégrale de Lebesgue et des méthodes de la théorie des séries divergentes, à l'étude des propriétés de la suite des constantes de Fourier et à celle de certaines classes de séries trigonométriques qui, sans être des séries de Fourier, s'en rapprochent par leurs propriétés essentielles.

§ 1. Définitions.

1. Nous appellerons *série trigonométrique* toute série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{0}^{\infty} \mathrm{A}_n \, . \qquad (1)$$

Nous nous bornerons, en général, à supposer que les coefficients a_n, b_n de la série sont réels ainsi que la variable x; en vertu de la périodicité de $\cos nx$, $\sin nx$, nous pourrons nous borner à faire varier x dans un intervalle de longueur 2π.

2. Une classe particulière de séries trigonométriques, spécialement importante, est celle des *séries de Fourier*. $f(x)$ désignant une fonction réelle, périodique de période 2π, intégrable au sens de Lebesgue dans l'intervalle d'une période, formons les constantes [1]

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \; , \qquad \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx \, dx \; , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

Ce sont les *constantes de Fourier* ou les *coefficients de Fourier* de $f(x)$. La série trigonométrique correspondante est appelée —

[1] La notion de série de Fourier dépend donc de la notion d'intégrale. Dans tout ce qui suit, nous nous servirons de la notion d'intégrale due à Lebesgue. Si l'on emploie une notion d'intégrale plus étendue, par exemple celle de Harnack-Young ou celle de Denjoy, on peut former les constantes (2) pour des fonctions qui n'ont pas de série de Fourier. La série trigonométrique correspondante est dite quelquefois une série de Fourier *généralisée*. Nous laisserons de côté ces séries.

qu'elle converge ou non — la *série de Fourier* de $f(x)$. $f(x)$ est la *génératrice* de cette série et nous exprimons la dépendance de $f(x)$ et de la suite de ses constantes de Fourier par le symbole d'équivalence [1]

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ . \tag{3}$$

L'introduction de ce symbole est légitimée par le fait que deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ qui ont même suite de constantes de Fourier, donc même série de Fourier, sont telles que

$$\int_0^x f dx = \int_0^x g dx \tag{4}$$

et réciproquement. On a donc $f(x) = g(x)$ presque partout, c'est-à-dire sauf éventuellement aux points d'un ensemble de mesure nulle [2]. En général il n'est pas permis de remplacer le symbole d'équivalence par le symbole d'égalité, le second membre de (3) pouvant diverger ou pouvant converger vers une valeur différente de $f(x)$. Notons, par contre, que les équivalences peuvent s'additioner entre elles ou se multiplier par des constantes comme des égalités et que l'intégration terme à terme de l'équivalence (3) conduit à une égalité

$$\int_0^x f dx = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, dx \tag{5}$$

dans laquelle la série second membre est uniformément convergente [3]. Nous rencontrerons au § 7 quelques théorèmes sur la multiplication des équivalences.

§ 2. Convergence des séries trigonométriques générales.

1. G. Cantor [4] a montré que la série trigonométrique (1) ne peut converger pour toute valeur de x que si $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ lors-

---

[1] Hurwitz, 2. — [2] Lebesgue 5, p. 91. — [3] Lebesgue 5, p. 102. — [4] G. Cantor 1.