§ 2. Convergence des séries trigonométriques générales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

qu'elle converge ou non — la *série de Fourier* de $f(x)$. $f(x)$ est la *génératrice* de cette série et nous exprimons la dépendance de $f(x)$ et de la suite de ses constantes de Fourier par le symbole d'équivalence [1]

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ . \tag{3}$$

L'introduction de ce symbole est légitimée par le fait que deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ qui ont même suite de constantes de Fourier, donc même série de Fourier, sont telles que

$$\int_0^x f dx = \int_0^x g dx \tag{4}$$

et réciproquement. On a donc $f(x) = g(x)$ presque partout, c'est-à-dire sauf éventuellement aux points d'un ensemble de mesure nulle [2]. En général il n'est pas permis de remplacer le symbole d'équivalence par le symbole d'égalité, le second membre de (3) pouvant diverger ou pouvant converger vers une valeur différente de $f(x)$. Notons, par contre, que les équivalences peuvent s'additioner entre elles ou se multiplier par des constantes comme des égalités et que l'intégration terme à terme de l'équivalence (3) conduit à une égalité

$$\int_0^x f dx = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, dx \tag{5}$$

dans laquelle la série second membre est uniformément convergente [3]. Nous rencontrerons au § 7 quelques théorèmes sur la multiplication des équivalences.

§ 2. Convergence des séries trigonométriques générales.

1. G. Cantor [4] a montré que la série trigonométrique (1) ne peut converger pour toute valeur de x que si $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ lors-

---

[1] Hurwitz, 2. — [2] Lebesgue 5, p. 91. — [3] Lebesgue 5, p. 102. — [4] G. Cantor 1.

que $n \to \infty$. Plus généralement, cette condition est encore nécessaire pour que $\sum_0^\infty A_n$ converge sur un ensemble de points de mesure positive [1]. Mais elle est loin d'être suffisante. On peut, avec M. Steinhaus [2], construire une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro et qui, cependant, diverge partout. Le même mathématicien a donné une série trigonométrique qui converge dans un intervalle et qui diverge dans un autre intervalle [3]. Les phénomènes de convergence et de divergence les plus divers peuvent donc se présenter et M. Mazurkiewicz a même montré que pour tout procédé « toeplitzien »[4] de sommation des séries trigonométriques, il est possible de construire une série dont les coefficients tendent vers zéro et qui cependant n'est pas sommable, presque partout, par ce procédé [5].

2. Nous ne connaissons presque rien sur la structure de l'ensemble des points de convergence ou de divergence d'une série trigonométrique. On voit bien que l'ensemble des points de convergence dans un intervalle de périodicité ne peut pas être entièrement arbitraire, car l'ensemble des ensembles de points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ a une puissance supérieure à celle de l'ensemble des suites possibles de constantes a_n, b_n. Si nous ajoutons à ce résultat négatif le fait établi par M. Neder [6], qu'étant donné arbitrairement un nombre $m (0 \leqq m \leqq 2\pi)$, il existe des séries trigonométriques qui, dans un intervalle de périodicité, divergent sur un ensemble de mesure m, nous aurons dit tout ce que l'on sait de général sur la question.

3. Une série trigonométrique peut converger partout et ne converger uniformément dans aucun intervalle. On trouvera dans la thèse de M. Neder [7] une étude approfondie des questions qui se posent à ce sujet.

4. Une série trigonométrique, même partout convergente, n'est pas, en général, absolument convergente. MM. Lusin [8], Denjoy [9] et S. Bernstein [10] ont obtenu sur la convergence absolue quelques résultats intéressants retrouvés et simplifiés

---

[1] Lebesgue 5, p. 110. — [2] Steinhaus 1. — [3] Steinhaus 5. Voir aussi Lusin 1. — [4] Toeplitz 2. — [5] Mazurkiewicz. — [6] Neder 1. — [7] Neder 1. — [8] Lusin 2. — [9] Denjoy 1. — [10] S. Bernstein.

dans leur démonstration par M. Fatou [1]. Si la série ΣA_n converge absolument au point x_0, la convergence ou la divergence de la série au point $x_0 - \xi$, symétrique du point arbitraire $x_0+\xi$ relativement à x_0, est de même nature qu'au point $x_0+\xi$. De là résulte que l'ensemble des points de convergence absolue est symétrique par rapport à chacun de ses points. S'il n'a qu'un nombre fini de points et si on les représente (mod. 2π) sur le cercle de rayon 1, ils seront disposés suivant les sommets d'un polygone régulier. S'il y a une infinité de points de convergence absolue, leur ensemble est ou de mesure nulle ou de mesure 2π. Dans ce dernier cas, $\Sigma(|a_n| + |b_n|)$ converge et la série trigonométrique converge absolument partout. Donc, si $\Sigma(|a_n| + |b_n|)$ diverge, l'ensemble des points de convergence absolue est de mesure nulle. Plus généralement, si une série trigonométrique a une infinité de points de convergence absolue, l'ensemble des points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ ayant une propriété de convergence ou de divergence déterminée est de mesure nulle ou de mesure 2π.

5. Lorsque les suites a_n, b_n tendent vers zéro et sont telles que l'une des séries de différences $\Sigma\Delta^k a_n$, $\Sigma\Delta^k[(-1)^n a_n]$ ou $\Sigma\Delta^k b_n$, $\Sigma\Delta^k[(-1)^n b_n]$ est absolument convergente, on sait que les séries $\Sigma a_n \cos nx$, $\Sigma b_n \sin nx$ convergent uniformément dans tout intervalle ne contenant aucune valeur congrue à $\frac{2p\pi}{2^k}$ (p entier) [2]. En général, cette convergence n'est pas uniforme dans l'intervalle $\left(\frac{2p\pi}{2^k} - \varepsilon,\ \frac{2p\pi}{2^k} + \varepsilon\right)$. Si, par exemple, $b_n \geq b_{n+1}$, la condition $nb_n \to 0$ est nécessaire et suffisante pour que la série $\Sigma b_n \sin nx$ converge uniformément dans tout intervalle [3].

§ 3. La convergence des séries de Fourier.

1. Aux critères connus de convergence des séries de Fourier dus à Lejeune-Dirichlet, Jordan, Lipschitz, Dini et Lebesgue [4], M. de la Vallée-Poussin a ajouté le suivant [5]:

---

[1] Fatou 3. — [2] Lebesgue 5, p. 44. Voir aussi W. H. Young 18. — [3] J. W. Chaundy and A. E. Jolliffe. — [4] Pour ces critères voir Lebesgue 5, p. 64-73. — [5] Ch. J. de la Vallée Poussin 3.