§ 3. La convergence des séries de Fourier.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

dans leur démonstration par M. FATOU [1]. Si la série ΣA_n converge absolument au point x_0, la convergence ou la divergence de la série au point $x_0-\xi$, symétrique du point arbitraire $x_0+\xi$ relativement à x_0, est de même nature qu'au point $x_0+\xi$. De là résulte que l'ensemble des points de convergence absolue est symétrique par rapport à chacun de ses points. S'il n'a qu'un nombre fini de points et si on les représente (mod. 2π) sur le cercle de rayon 1, ils seront disposés suivant les sommets d'un polygone régulier. S'il y a une infinité de points de convergence absolue, leur ensemble est ou de mesure nulle ou de mesure 2π. Dans ce dernier cas, $\Sigma(|a_n|+|b_n|)$ converge et la série trigonométrique converge absolument partout. Donc, si $\Sigma(|a_n|+|b_n|)$ diverge, l'ensemble des points de convergence absolue est de mesure nulle. Plus généralement, si une série trigonométrique a une infinité de points de convergence absolue, l'ensemble des points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ ayant une propriété de convergence ou de divergence déterminée est de mesure nulle ou de mesure 2π.

5. Lorsque les suites a_n, b_n tendent vers zéro et sont telles que l'une des séries de différences $\Sigma\Delta^k a_n$, $\Sigma\Delta^k[(-1)^n a_n]$ ou $\Sigma\Delta^k b_n$, $\Sigma\Delta^k[(-1)^n b_n]$ est absolument convergente, on sait que les séries $\Sigma a_n \cos nx$, $\Sigma b_n \sin nx$ convergent uniformément dans tout intervalle ne contenant aucune valeur congrue à $\frac{2p\pi}{2^k}$ (p entier) [2]. En général, cette convergence n'est pas uniforme dans l'intervalle $\left(\frac{2p\pi}{2^k}-\varepsilon,\ \frac{2p\pi}{2^k}+\varepsilon\right)$. Si, par exemple, $b_n \geq b_{n+1}$, la condition $nb_n \to 0$ est nécessaire et suffisante pour que la série $\Sigma b_n \sin nx$ converge uniformément dans tout intervalle [3].

§ 3. LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER.

1. Aux critères connus de convergence des séries de Fourier dus à LEJEUNE-DIRICHLET, JORDAN, LIPSCHITZ, DINI et LEBESGUE [4], M. de la VALLÉE-POUSSIN a ajouté le suivant [5]:

---

[1] Fatou 3. — [2] Lebesgue 5, p. 44. Voir aussi W. H. Young 18. — [3] J. W. Chaundy and A. E. Jolliffe. — [4] Pour ces critères voir Lebesgue 5, p. 64-73. — [5] Ch. J. de la Vallée Poussin 3.

Si la fonction $f(x)$ est telle que

$$F(u) = \frac{1}{2u}\int_0^u [f(x+u) + f(x-u)]\,du$$

est à variation bornée quand $u \to 0$, la série de Fourier de $f(x)$ converge vers $F(+0)$ au point x.

Ce critère contient celui de Jordan comme cas particulier.

M. W. H. Young [1] a donné un autre critère qui n'est pas contenu dans celui de M. de la Vallée-Poussin:

Si $f(x)$ est simplement discontinue au point x — c'est-à-dire si $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent — et si dans le voisinage de ce point, on a

$$\frac{1}{2}[f(x+h) + f(x-h)] = \frac{1}{h}\int_0^h g(t)\,dt\ ,$$

$g(t)$ étant une fonction bornée ou plus généralement telle que $\frac{1}{h}\int_0^h |g(t)|\,dt$ soit bornée pour $h \to 0$, la série de Fourier de $f(x)$ converge au point x vers $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Dans un autre travail, M. W. H. Young [2] fait voir que dans l'énoncé précédent, la condition relative à $g(t)$ peut être remplacée par celle que, pour une valeur $q > 0$,

$$\frac{1}{h^q}\int_0^h |d[h^q(f(x+h) + f(x-h))]|$$

soit bornée pour $h \to 0$.

M. G. H. Hardy [3] a étudié et comparé entre eux les différents critères connus de convergence des séries de Fourier.

2. Riemann a déjà démontré que les coefficients d'une série de Fourier (d'une fonction bornée intégrable au sens de Riemann) tendent vers zéro et Lebesgue a montré que la propriété subsiste lorsque la fonction, bornée ou non, n'est pas intégrable

---

[1] W. H. Young 21. — [2] W. H. Young 24. On pourra consulter aussi W. H. Young 26, 27. — [3] Hardy 2.

au sens de Riemann mais est intégrable à son sens. Pour toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Lebesgue on a donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ [1]}.$$

Cette propriété ne subsiste plus nécessairement si $f(x)$ est non bornée, intégrable au sens de Riemann ou de Harnack-Young ou de Denjoy, sans l'être au sens de Lebesgue. Si l'on remarque que la condition $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ est une condition nécessaire de convergence de la série de Fourier et qu'il existe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue, mais non au sens de Riemann, et dont la série de Fourier converge partout vers la fonction [2], on se rend compte de l'importance qu'il y a à mettre la notion d'intégrale de Lebesgue à la base de la théorie des séries de Fourier.

3. Une propriété importante des séries de Fourier, déjà remarquée par RIEMANN pour la classe des fonctions bornées intégrables à son sens et étendue ensuite par M. LEBESGUE, réside dans le fait que la convergence ou la divergence de la série de Fourier en un point x ne dépend que des valeurs de la génératrice dans l'intervalle arbitrairement petit $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ [3]. Nous exprimerons ce fait en disant que la convergence d'une série de Fourier en un point est une *propriété locale* de sa génératrice.

Du BOIS-REYMOND a établi le premier qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge [4]. M. FEJÉR en a donné plusieurs exemples simples [5]. En voici un [6]:

La fonction périodique, de période 2π, définie dans $0 \leqq x \leqq \pi$ par

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^3} x)}{n^2}$$

et dans $(-\pi, 0)$ par la condition de parité

$$f(-x) = f(x), \qquad -\pi \leqq x \leqq 0$$

---

[1] Lebesgue 5, p. 61. — [2] Lebesgue 5, p. 68. — [3] Lebesgue 5, p. 60. — [4] Du Bois-Reymond. — [5] Fejér 3, 4, 5. — [6] Fejér 4.

est partout continue. Si on la développe en série de Fourier (de cosinus, puisqu'elle est paire), la série de Fourier de cosinus diverge au point de continuité $x = 0$.

Nous dirons qu'une fonction présente la singularité de Du Bois-Reymond en un point, lorsqu'elle est continue en ce point et que pourtant sa série de Fourier y diverge.

L'existence de fonctions possédant la singularité de Du Bois-Reymond est liée étroitement à l'ordre de grandeur des *constantes de Lebesgue*

$$\rho_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| dt \tag{6}$$

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des fonctions périodiques, de période 2π, intégrables et bornées, telles que $|f(x)| \leqq 1$. Soit $s_n(x)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de $f(x)$

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} f(x+2t)\,dt\,.$$

On a donc

$$|s_n(x)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| dt = \rho_n\,.$$

En prenant

$$f(x+2t) = sgn\,.\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

on voit que $s_n(x) = \rho_n$. ρ_n est donc le maximum de $|s_n(x)|$ au point x, dans le champ fonctionnel $\mathfrak{M}$. L'existence de fonctions continues dont la série de Fourier diverge tient essentiellement, comme l'a montré M. Lebesgue[1] au fait que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \infty$; c'est, d'ailleurs, une conséquence de théorèmes généraux sur les intégrales singulières que MM. Lebesgue[2], Haar[3] et Hahn[4] ont étudiées d'une manière approfondie. ρ_n est une fonction croissante de n et $sgn(\Delta^\nu \rho_n) = (-1)^{\nu-1} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$[5].

La valeur asymptotique de ρ_n a été étudiée par plusieurs

[1] Lebesgue 5, p. 86-87. — [2] Lebesgue 6. — [3] Haar 1. — [4] Hahn 1. — [5] Szegö.

auteurs [1]. On a

$$\rho_n = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{16}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2\nu(2n+1)-1}}{4\nu^2-1} \tag{7}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\log(2n+1) + \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\alpha_\nu}{(2n+1)^{2\nu}} + R_{k+1}\,. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Les α_ν sont des constantes et le reste R_{k+1} de la formule asymptotique est tel que $R_{k+1}n^{2k+2}$ reste borné lorsque $n \to \infty$.

4. M. Lebesgue a attiré l'attention sur une autre particularité: la série de Fourier d'une fonction partout continue peut être toujours convergente et pourtant ne pas converger uniformément dans $(0, 2\pi)$ [2]. M. Steinhaus a donné un exemple dans lequel la convergence n'est uniforme dans aucun intervalle [3]. On dit qu'une fonction continue dont la série de Fourier est partout convergente, présente en un point la singularité de Lebesgue lorsque sa série de Fourier ne converge pas uniformément dans le voisinage de ce point. M. Neder [4] a montré qu'étant donné un nombre $m (0 < m < 2\pi)$, il existe une fonction continue dont la série de Fourier converge partout et pour laquelle cependant l'ensemble des points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ où le degré de convergence non uniforme de la série est infini a une mesure $\geqq m$.

5. Un phénomène intéressant de convergence non uniforme, qui porte le nom de *phénomène de Gibbs*, a été particulièrement étudié [5]. Il concerne l'allure des sommes partielles $s_n(x)$ de la série de Fourier d'une fonction, à variation bornée au voisinage d'un point de discontinuité $x = a$, et consiste dans le fait que $s_n(x)$ a dans le voisinage du point a des maxima et minima relatifs dont les limites pour $n \to \infty$ sont extérieures à l'intervalle $(f(a+0), f(a-0))$. L'essentiel de ce phénomène peut s'étudier sur la fonction définie dans $(-\pi, \pi)$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & 0 < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

---

[1] Fejér 5, 8; Gronwall 1, 5; Szegö. — [2] Lebesgue 4; 5, p. 88. — [3] Steinhaus 3. — [4] Neder 1. — [5] Bôcher 1, 2; Carslaw; Gronwall 3; Jackson.

et en dehors par périodicité. La série de Fourier de cette fonction est

$$2\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} .$$

Il suffit d'étudier les sommes partielles $s_n(x)$ dans l'intervalle $0 < x < \pi$. On a $s_n(x) > 0$ pour $0 < x < \pi$ et le maximum absolu M_n de $s_n(x)$ dans $0 < x < \pi$ est atteint au point $x = \frac{\pi}{2n}$. M_n croit avec n et

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = 1,85\ldots > \frac{\pi}{2}\,^{1} . \qquad (8)$$

6. Fejér [2] a montré comment on peut, à l'aide de la série de Fourier, ou plus exactement, des constantes de Fourier d'une fonction $f(x)$ à variation bornée, déterminer le *saut* $f(x+0) - f(x-0)$. Il suffit de déterminer une des racines positives g de l'équation

$$\int_t^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = 0 \qquad (9)$$

pour conclure que

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(x \pm \frac{g}{n}\right) = f(x \pm 0) ,$$

d'où

$$f(x+0) - f(x-0) = \lim_{n\to\infty}\left[s_n\left(x+\frac{g}{n}\right) - s_n\left(x-\frac{g}{n}\right)\right] . \qquad (10)$$

Il a montré encore que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(b_k\cos kx - a_k\sin kx) = f(x+0) - f(x-0) . \qquad (11)$$

Lukacs [3] a trouvé une autre expression du saut; il a montré que

$$\frac{1}{\pi}[f(x+0) - f(x-0)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu\cos\nu x - a_\nu\sin\nu x) \qquad (12)$$

sous la seule hypothèse que le premier membre existe.

---

[1] Carslaw. — [2] Fejér 10; Sidon. — [3] Lukacs.

7. Si $|f(x)|^p$ $(p > 1)$ est intégrable dans $(0, 2\pi)$, $\int_0^{2\pi} |s_n(x)|^p dx$ reste bornée pour $n \to \infty$ et

$$\int_0^{2\pi} |f - s_n|^p dx \to 0 \text{ [1]}. \tag{13}$$

Dans le cas particulier où $p = 2$, HARDY et LITTLEWOOD ont montré [2] que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(s_0 - s)^2 + (s_1 - s)^2 + \ldots + (s_n - s)^2}{n + 1} = 0 \tag{14}$$

en tout point où $s = \frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$ existe. Si dans (14) on prend $s = f(x)$, la formule est vraie presque partout.

8. RIEMANN a déjà donné des conditions suffisantes pour que la série de Fourier d'un produit $f(x)\lambda(x)$ converge en même temps que la série de Fourier de $f(x)$. Ces conditions ont été élargies par M. LEBESGUE [3] puis par M. STEINHAUS qui montre que la série de Fourier de $f\lambda$ converge au point x de convergence de la série de Fourier de f si f est bornée et si $\lambda(x)$ est telle que $\frac{\lambda(x + t) - \lambda(x)}{t}$ soit intégrable par rapport à t dans tout intervalle [4].

9. M. LUSIN [5] a indiqué une condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable converge presque partout. Mais cette condition n'est pas simple et nous ignorons si la série de Fourier d'une fonction continue ou d'une fonction de carré intégrable a nécessairement des points de convergence et si leur ensemble est de mesure positive. On sait que la série de Fourier d'une fonction partout continue peut avoir une infinité partout dense de points de divergence et que l'ensemble des points de divergence peut avoir la puissance du continu [6]. M. KOLMOGOROFF [7] a construit une fonction

---

[1] M. Riesz 8. Dans le cas $p = 1$ on ne peut pas affirmer que

$$\int_0^{2\pi} |f - s_n| dx \to 0.$$

Voir à ce sujet S. Banach et H. Steinhaus 1 et Hahn 1. — [2] Hardy et Littlewood 2. — [3] Lebesgue 5, p. 117-119. — [4] Steinhaus 2. — [5] Lusin 4. — [6] Neder 1. Le raisonnement de Du Bois-Reymond 1 pour établir l'existence d'un ensemble partout dense de points de divergence n'est pas concluant. Voir à ce propos Neder 5. — [7] Kolmogoroff 1.

intégrable, de carré non intégrable, dont la série de Fourier diverge presque partout. Il a montré que si $f(x)$ est de carré intégrable, les suites partielles $s_{n_p}(x)$ de la série de Fourier convergent presque partout vers $f(x)$ lorsque $p \to \infty$ si

$$\frac{n_{p+1}}{n_p} > k > 1$$

k étant une constante [1].

Après que MM. Fatou [2], Jerosch et Weyl [3], Weyl [4] eurent démontré certains résultats moins généraux, M. W. H. Young [5] établit que si ΣA_n est une série de Fourier, $\Sigma \frac{A_n}{n^\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ est une série de Fourier convergeant presque partout. M. Hardy [6] a réussi à faire voir que dans ce résultat n^ε peut être remplacé par $\log n$. Dans le cas spécial des fonctions de carré intégrable, MM. Kolmogoroff et Seliverstoff [7] ont montré que la convergence de $\Sigma (a_n^2 + b_n^2)(\log n)^{1+\delta}$ $(\delta > 0)$ entraîne la convergence « presque partout » de la série de Fourier ΣA_n et M. Menchoff [8] a montré que le même résultat a lieu si $\Sigma (|a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon})$, $(\varepsilon > 0)$, converge.

10. On ne sait pas grand chose sur les propriétés que doit avoir $f(x)$ pour que sa série de Fourier soit absolument convergente. M. S. Bernstein [9] a cependant démontré que si $f(x)$ est à variation bornée et satisfait uniformément dans tout l'intervalle $(0,2\pi)$ à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha < \frac{1}{2}$, sa série de Fourier est absolument convergente; si $\alpha > \frac{1}{2}$, il y a des fonctions dont la série de Fourier n'est pas absolument convergente.

§ 4. La sommation des séries de Fourier par les moyennes de Cesàro.

1. On peut toujours remonter d'une série de Fourier — c'est-à-dire de la suite des constantes de Fourier — à la génératrice

---

[1] Kolmogoroff 2. — [2] Fatou 1. — [3] Jerosch et Weyl. — [4] Weyl. — [5] W. H. Young 11. — [6] Hardy 1. — [7] A. Kolmogoroff et G. Seliverstoff. — [8] Menchoff 3. — [9] S. Bernstein.