

HISTOIRE DE CINQ CONCEPTS FONDAMENTAUX DES MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Miller, G. A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515750>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

HISTOIRE DE CINQ CONCEPTS FONDAMENTAUX DES MATHÉMATIQUES

PAR

G. A. MILLER (Urbana, Illinois).

Les cinq concepts fondamentaux dont nous allons brièvement considérer l'histoire, sont ceux de *nombre naturel*, d'*inconnue* telle qu'elle se présente dans une équation algébrique, de *systèmes de postulats*, de *fonction* et de *groupe*.

Les deux premiers de ces cinq concepts se trouvent sous forme explicite dans l'œuvre d'un écrivain égyptien communément appelé Ahmès, qui vivait aux environs de 1700 avant J.C.; le troisième apparaît clairement dans les *Eléments* d'Euclide, où il semble qu'il soit en partie employé dans le but de séparer la philosophie et les mathématiques; les deux derniers ne furent pas reconnus explicitement avant le moment où le centre de l'activité mathématique eût gagné l'Europe centrale et occidentale, où ont pris naissance la plupart des développements en mathématiques modernes. Sous forme implicite cependant, ces deux concepts apparaissent aussi dans l'œuvre d'Ahmès mentionnée plus haut.

Le fait que deux de ces cinq concepts fondamentaux avaient reçu un nom particulier à l'époque où fut écrite l'œuvre d'Ahmès révèle une grande difficulté pour l'histoire des origines des mathématiques, à savoir le manque de renseignements directs sur certaines questions fondamentales. Une autre difficulté, presque aussi sérieuse, tient à l'inconsistance de nombre d'affirmations des écrivains primitifs. Le progrès en mathématiques est étroitement lié à l'exactitude des affirmations et à l'effort

fait en vue d'atteindre les faits réels. Ainsi, le développement lent des mathématiques à certaines époques et l'absence d'appréciations portées sur les acquisitions mathématiques antérieures, sont en eux-mêmes une preuve de la fragilité des assertions admises pendant ces périodes relativement aux questions mathématiques. M. G. Loria a récemment attiré l'attention sur le peu de valeur de nombreux récits biographiques¹.

Etant donné que les concepts abstraits de nombre naturel et d'inconnue telle qu'elle se présente dans une équation algébrique, se trouvent déjà avec un nom particulier dans les ouvrages d'Ahmès, il est clair que notre exposé du développement de ces notions ne saurait être que très incomplet. D'autre part, l'histoire de l'influence de ces notions sur les développements mathématiques ultérieurs est excessivement étendue.

En effet, Minkowski a pu qualifier les nombres naturels de source de toutes les mathématiques et le vaste domaine de l'algèbre, qui constitue le plus précieux algorithme des sciences, s'est surtout développé sous l'influence de la notion d'inconnue telle qu'elle se présente dans une équation algébrique. L'inconnue est le nœud de l'équation et l'équation est le nœud de l'algèbre.

Nous trouvons, à la page 107 de la traduction donnée par M. Peet (1923) de l'œuvre d'Ahmès, que les Egyptiens parlaient du *nombre* 700. Cela représente un grand pas en avant sur l'idée, par exemple, de 700 objets d'une certaine espèce, et cela montre que les Egyptiens ne possédaient pas seulement la notion du nombre abstrait, mais aussi celle d'une totalité appelée nombre. Puisqu'ils employaient aussi les couples de nombres que nous appelons maintenant fractions rationnelles, l'ensemble de leurs nombres se composait de l'un des groupes mathématiques les plus importants, à savoir le groupe formé par les nombres rationnels, excepté zéro, quand ces nombres sont combinés par multiplication. A propos du fait qu'ils n'employaient pas le nombre zéro, on peut dire que, s'ils représentaient par le terme nombre (*r h t*) ce premier groupe infini connu, cela n'entraîne pas qu'ils aient eu une notion claire de ses propriétés et de son sous-groupe. Le fait qu'il renferme un nombre infini de généra-

¹ G. Loria. *Scientia*, volume 35 (1924) p. 10.

teurs indépendants se déduit directement du théorème d'Euclide qui dit que le nombre des nombres premiers est infini.

Tandis que l'œuvre d'Ahmès témoigne d'un développement du concept de nombre suffisant pour fournir tous les éléments d'un groupe en ce qui concerne l'opération de multiplication, quand on donne au terme groupe son sens mathématique moderne restreint, ces nombres ne constituent pas un groupe en ce qui concerne l'opération d'addition, dans ce sens restreint. Ils constituent cependant un groupe pour l'opération d'addition quand le terme groupe est pris dans son sens mathématique moderne le plus général. Si le terme groupe est employé dans ce second sens, on peut dire que les nombres qui apparaissent dans l'œuvre d'Ahmès constituent un groupe en ce qui concerne chacune des deux lois de combinaison connues comme multiplication et addition. A moins que le contraire ne soit spécifié, nous emploierons désormais le terme groupe dans son sens mathématique moderne restreint puisque c'est son sens le plus courant en mathématiques modernes et dans les traités sur la théorie des groupes.

On peut se rendre compte des longs développements qu'a dû subir le concept de nombre avant l'œuvre d'Ahmès par le temps qu'il a mis depuis à se développer suffisamment pour que les nombres connus constituent un groupe en ce qui concerne l'opération d'addition. Cette étape ne fut pas atteinte avant que l'on n'eût admis zéro parmi les nombres, introduit les nombres négatifs et étendu à leur domaine les opérations algébriques. Or, aucune théorie satisfaisante des nombres négatifs ne fut connue avant le commencement du XIX^e siècle, plus de trois mille ans après l'apparition de l'œuvre d'Ahmès.

En ce plaçant au point de vue de la théorie des groupes, on peut donc dire que le concept de nombre était assez développé avant l'époque d'Ahmès pour donner lieu à un système de nombres qui constituent un groupe pour l'opération de multiplication. De l'époque d'Ahmès au commencement du XIX^e siècle, ce développement progressa de façon à fournir un système de nombres qui forment un domaine de rationalité. En d'autres mots, ces nombres forment un groupe en ce qui concerne l'opération d'addition et quand l'identité de ce groupe est exclue, les

nombres restants du système constituent un groupe abélien pour l'opération de multiplication. Depuis le commencement du XIX^e siècle, ces développements ont conduit, non seulement à un domaine de rationalité formé de nombres complexes, mais surtout à la considération de divers groupes finis ayant comme éléments des nombres, par exemple les groupes formés par rapport à un module, le groupe formé par les n^{mes} racines de l'unité, etc.

En réalité, certains de ces groupes finis apparurent avant le commencement du XIX^e siècle, en particulier dans les ouvrages de L. Euler; mais c'est sur les développements postérieurs qu'ils exercèrent une influence beaucoup plus grande et assumèrent de plus en plus un rôle dominant dans le développement de la théorie des nombres. Vers la fin du XIX^e siècle, les groupes continus de transformation commencèrent aussi à exercer une grande influence sur le développement de cette théorie. L'influence significative du concept de groupe sur le développement du concept de nombre au commencement de notre siècle, se reflète dans le fait que les systèmes modulaires et les nombres complexes supérieurs sont passés en revue sous le titre général de « théorie des groupes » dans le volume 46 (1916–1918) du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*.

Tandis que les groupes infinis, discontinus, finis et continus ont joué un rôle important dans le développement du concept de nombre, il est probable que le concept d'inconnue telle qu'elle se présente dans une équation algébrique a eu une influence plus fondamentale sur le développement de notre notion moderne de nombre. En fait, la théorie moderne des nombres complexes ordinaires est presque entièrement due à l'étude de la résolution d'équations à une inconnue. Il est plus difficile de déterminer jusqu'à quel point notre théorie des nombres négatifs est due à l'étude de telles équations puisque des oppositions comme doit et avoir, haut et bas, et la notion de distance à une même droite de points situés de part et d'autre de cette droite — notion qui apparaît avec l'emploi des axes de coordonnées — ont aussi été d'une importance capitale dans la généralisation de l'emploi des nombres négatifs. En particulier, l'étude des valeurs

des fonctions trigonométriques d'un angle a été beaucoup facilitée par l'emploi des nombres négatifs et semble avoir agi profondément sur cet emploi. L'influence de l'étude de la trigonométrie sur l'emploi général des nombres négatifs n'a pas été suffisamment reconnue.

L'histoire des influences des concepts de groupe et d'inconnue telle qu'elle se présente dans une équation algébrique sur le développement du concept de nombre a été brièvement notée plus haut. Les concepts de fonction et de systèmes de postulats semblent avoir exercé une influence moins considérable sur les premiers développements des nombres. Le second de ces concepts fut introduit sous forme explicite par les Grecs de l'antiquité mais il semble qu'ils ne l'aient employé que pour des considérations géométriques. Récemment, M. G. Peano et d'autres ont employé ce concept explicitement pour établir une théorie des entiers rationnels et l'étude des relations entre la théorie des nombres et la théorie des fonctions a suscité une abondante littérature, rendue plus accessible par l'ouvrage de M. A. PRINGSHEIM intitulé: *Vorlesungen über Zahlen und Funktionentelehre*, 1916.

L'un des traits les plus intéressants de l'histoire du concept d'inconnue telle qu'elle se présente dans une équation algébrique, est le fait qu'à une époque aussi reculée que celle d'Ahmès, un symbole particulier était déjà employé pour représenter un nombre dont la valeur était explicitement inconnue. Ce candide aveu d'ignorance fut la source de nombreuses connaissances. Il est vrai que le terme qui apparaît chez Ahmès n'a pas une signification exactement équivalente à celle de notre inconnue. Ce terme a été représenté par le mot quantité ou tas, mais le fait que cette quantité était regardée comme une inconnue ressort du contexte d'une façon évidente. Il semble que l'on puisse justifier cette affirmation qu'à l'époque d'Ahmès les Egyptiens utilisaient un symbole pour un nombre inconnu, aussi bien quand ce nombre indiquait une opération à effectuer que lorsqu'on effectuait sur lui cette opération. Que ce fut une étape remarquable dans l'histoire des mathématiques, preuve en est le rôle fondamental qu'un tel symbole joua dans les développements postérieurs des mathématiques.

Un pas quelque peu semblable fut fait par les Grecs de l'antiquité lorsqu'ils donnèrent comme base aux développements de la géométrie un système de postulats. Ici encore, on sous-entend un aveu d'ignorance, car, si tout ce qui est nécessaire au développement des mathématiques pouvait se prouver, il ne serait pas essentiel d'introduire un système de postulats. C'est cette soumission aux faits, même s'ils introduisent des restrictions que nous supprimerions volontiers si nous le pouvions, qui a conduit à des progrès réels dans le développement des mathématiques, d'abord de la part des Egyptiens lorsqu'ils introduisirent un symbole spécial pour représenter un nombre inconnu et plus tard de la part des Grecs quand ils bâtirent leurs développements géométriques sur un système de postulats. Il est d'autant plus remarquable de trouver dans les *Eléments* d'Euclide une séparation aussi nette des mathématiques et de la philosophie grâce à un système de postulats, que les Grecs étaient plus portés à la spéculation philosophique.

Vu son caractère élémentaire et fondamental, le concept de nombre s'est naturellement présenté à tous les penseurs dans le domaine mathématique. La notion de nombre inconnu, une fois introduite, n'est jamais non plus tombée complètement dans l'oubli, même si elle n'a fait que peu de progrès pendant plusieurs siècles. Au contraire, les traits essentiels du concept de système de postulats ont échappé à la plupart des successeurs des Grecs jusqu'à une époque relativement récente. Ils considéraient généralement que ces postulats représentaient des faits fondamentaux, au lieu d'y voir des propositions qui fournissent la base d'une construction mathématique rigoureuse au cas où elles sont admises. Ce n'est qu'au commencement du XIX^e siècle que le monde mathématique recommença à saisir la vraie nature du système de postulats employé par Euclide et à reconnaître les éléments arbitraires contenus dans un tel système.

Le caractère fondamental du concept de fonction se traduit dans le fait qu'on y insiste dans beaucoup de nos traités modernes de mathématiques élémentaires. Nous avons dit au premier paragraphe qu'on n'employa pas ce concept explicitement jusqu'à une époque relativement récente. En effet, Jean Bernoulli

paraît avoir été le premier à employer le terme fonction dans son sens moderne, en 1698, bien que Leibniz l'ait employé avec un sens mathématique quelque peu différent six ans auparavant. Implicitement, ce concept, comme celui de groupe, se trouve déjà dans l'œuvre d'Ahmès, ainsi qu'en témoigne la formule de l'aire du cercle en fonction de son diamètre et la formule qui donne la somme d'une progression arithmétique en fonction du premier terme, du nombre de termes et de la raison. L'emploi implicite du concept de fonction apparaît encore plus clairement dans les ouvrages des Grecs que dans ceux des Egyptiens, mais les Grecs ne l'employèrent pas explicitement non plus.

Etant donné le caractère très élémentaire du concept de fonction, il est étonnant de voir qu'aucun symbole spécial ne fut employé pour le représenter avant 1694, lorsque Bernoulli représenta incidemment par la lettre n une fonction d'une seule variable. L'emploi d'un symbole particulier pour l'inconnue semble ainsi avoir précédé de plus de 3000 ans l'emploi du symbole pour la fonction. A un esprit mathématique moderne, il semble que la distance qui sépare l'emploi d'un symbole particulier pour l'inconnue de l'emploi d'un symbole particulier pour une fonction de cette inconnue, soit relativement courte; c'est pourquoi il est intéressant de noter le laps de temps considérable qui s'écoula avant que cette distance ne fût vraiment franchie. Plus de vingt ans plus tard (1718), Jean Bernoulli faisait connaître la première définition générale du concept mathématique de fonction.

Ce concept se présente si fréquemment dans l'étude des phénomènes physiques qu'il est de la première importance de s'habituer à envisager des relations données par des fonctions si l'on veut dégager une interprétation des choses qui nous entourent. C'est pourquoi l'étude mathématique des fonctions doit retenir l'attention de tous ceux qui cherchent à donner une expression abstraite aux problèmes qui se posent à nous de tous côtés. Il est donc d'un intérêt particulier non seulement pour celui qui étudie l'histoire des mathématiques mais aussi pour celui qui étudie le développement intellectuel de la race humaine, de noter que l'emploi explicite de ce concept se fit si tard et qu'une étude systématique n'en fut entreprise,

on peut le dire, qu'au xvii^e siècle, quand Descartes, Fermat et d'autres fondèrent la géométrie analytique. Depuis lors on a accordé de plus en plus d'attention à l'emploi explicite de ce concept dans le développement des mathématiques et ainsi l'histoire des mathématiques s'est en partie confondue avec l'histoire du développement de ce concept.

L'influence du concept de groupe sur le développement du concept de nombre a été brièvement soulignée plus haut. Dans un article intitulé: « Des fondements de la géométrie », publié dans *The Monist*, volume 9, page 1¹, H. Poincaré a montré que la conception du groupe était évidente dans les *Eléments* d'Euclide et qu'elle sert de base à beaucoup de ses démonstrations. A la page 34², il dit: « En résumé, le principal fondement des démonstrations d'Euclide est réellement l'existence du groupe et ses propriétés. Sans doute, il a recours à d'autres axiomes qu'il est plus difficile de rapporter à la notion de groupe. Tel est l'axiome qu'emploient quelques géomètres quand ils définissent la ligne droite comme la plus courte distance entre deux points. Mais ce sont précisément les axiomes de cette nature qu'Euclide énonce. Les autres, qui sont plus directement associés à l'idée de déplacement et à l'idée de groupe, sont justement ceux qu'il admet implicitement et qu'il ne croit même pas nécessaire d'énoncer. Cela revient à dire que les premiers axiomes (ceux qui sont énoncés) sont le fruit d'une expérience plus récente, tandis que les sous-entendus ont été assimilés les premiers par nous; par conséquent la notion de groupe existait avant toutes les autres. »

Malgré l'importance fondamentale de la notion de groupe dans les premiers développements des mathématiques, ce fut, des cinq concepts que nous considérons, le dernier à être reconnu d'une manière explicite.

Ce n'est que vers la fin du xviii^e siècle que P. Ruffini employa le terme de permutation pour représenter un groupe. Un peu avant, J.-L. Lagrange désignait la théorie des substitutions par

¹ Article reproduit par L. Rougier dans la *Bibliothèque de synthèse scientifique*.

² Page 51 de la traduction.

l'expression d'analyse combinatoire. Le sujet de la théorie des groupes en tant que théorie autonome fut développé pendant la première moitié du XIX^e siècle grâce aux travaux de N. H. Abel, E. Galois, A. L. Cauchy et d'autres. Durant la seconde moitié du XIX^e siècle, cette théorie parvint au centre des recherches mathématiques à la suite des nouveaux champs d'application indiqués par C. Jordan, S. Lie, M. F. Klein et H. Poincaré. On a été conduit à trois grands types de théorie des groupes, à savoir une théorie des groupes en algèbre, une en analyse et une en géométrie. Chacune de ces théories est en plein développement, grâce aux efforts de mathématiciens de différents pays. En particulier, M. E. Cartan a récemment dirigé l'attention vers le fait que des champs nouveaux s'ouvrent au géomètre grâce au groupe d'holonomie qui occupe en géométrie une place analogue à celle que le groupe de Galois occupe dans la théorie des équations algébriques.

Si des personnes différentes s'intéressent à des traits différents de l'histoire des mathématiques, on peut admettre qu'une grande partie des lecteurs y voient avant tout un moyen de pénétrer plus profondément la véritable nature des mathématiques et son rôle dans le développement de la race humaine. Pour ceux-là, l'histoire des concepts fondamentaux devrait avoir un attrait particulier puisqu'elle indique les sources principales des progrès mathématiques. Les mathématiques ont pour caractéristique essentielle de laisser de côté des différences légères pour pouvoir saisir plus pleinement les ressemblances importantes. Par exemple, il est probable qu'il n'existe pas deux objets physiques absolument pareils, mais on aboutit au concept de nombre en les considérant comme des unités identiques. La source de toutes les mathématiques se trouve ainsi dans le fait de limiter notre attention aux ressemblances qui existent entre différents objets. Le concept de nombre naquit de bonne heure de cette tendance de l'esprit humain.

De même, on ne peut pas élever au carré des objets inconnus, mais les nombres abstraits qu'on leur associe peuvent être soumis aux diverses opérations algébriques fondamentales et donner lieu aux équations algébriques dont la solution vient

souvent éclairer les objets en question. Les systèmes de postulats qui sont à la base de la géométrie se rapportent à des conditions idéales que peuvent suggérer, mais non pas entièrement vérifier, nos expériences physiques. Les nombreuses variables complexes fournies par la nature suggèrent l'étude des relations entre nombres et cela conduit au vaste champ de la théorie des fonctions. Finalement, les nombreuses transformations d'éléments qui semblent garder un caractère d'identité conduisent au domaine de la théorie des groupes. Tous les concepts fondamentaux considérés ici peuvent ainsi avoir été suggérés par le monde physique et le mathématicien peut avoir été guidé par ces suggestions dans le développement de théories abstraites qui, à leur tour, donnent des éclaircissements nouveaux sur les phénomènes physiques qui l'entourent.

L'histoire des mathématiques révèle entre autres choses les périodes pendant lesquelles les divers concepts féconds qui étaient apparus sous une forme plus ou moins concrète, devinrent l'objet d'une étude spéciale après avoir été définis de façon à devenir des notions abstraites comportant une application aussi étendue que possible.

Les développements mathématiques les plus féconds sont en relation avec les concepts que suggère le plus fréquemment notre milieu physique. Ainsi le mathématicien a toujours collaboré avec les savants en cherchant à pénétrer intellectuellement l'infinité d'activités particulières qui s'offrent à lui. Bien que de grands progrès aient été réalisés vers des vues plus claires, il reste encore à faire; c'est pourquoi le problème du développement des mathématiques semble infini et d'un attrait que n'ont fait qu'accroître les développements obtenus jusqu'à présent. Ce fait doit constituer une pensée centrale dans l'étude de l'histoire de ces développements.

Le présent article est en rapport étroit avec un autre travail de l'auteur présenté au Congrès international de mathématiques tenu à Toronto en août 1924. En fait, cet article est dû directement à cette aimable suggestion de M. Fehr, pendant ce congrès, que ladite communication pourrait être complétée dans les grandes lignes pour paraître dans l'*Enseignement mathéma-*

tique. Le sujet est si vaste que même ces développements supplémentaires ne complètent que d'une manière imparfaite l'examen des concepts en question. Nous espérons cependant que les idées exposées ici pourront être d'un intérêt général pour certains maîtres de mathématiques et les aider à comprendre plus complètement une phase importante du développement des mathématiques.

Université d'Illinois, août 1924.

(Traduit de l'anglais par M^{lle} S. GODARD, Genève.)

SOMMABILITÉ ET FONCTION $E_{\alpha}(x)$

PAR

A. BUHL (Toulouse).

L'*Enseignement mathématique* a publié, en 1908, un article de M. A. COSTABEL, *Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe*, sujet sur lequel je suis revenu grâce à des circonstances récentes.

M. Costabel résumait un travail présenté à la Faculté des Sciences de Montpellier pour l'obtention d'un diplôme d'Etudes supérieures. On pourrait revenir aussi sur le sujet pédagogique, le diplôme en question existant toujours, comme sur le sujet scientifique qui n'a cessé de progresser depuis dix-sept ans.

Je n'ose prétendre que le diplôme ait fait rédiger des choses de grand intérêt, ne serait-ce que parce qu'aucune publication imprimée n'est obligatoire, mais enfin bien des élèves y ont honorablement travaillé et se sont notablement élevés ainsi au-dessus de la licence, tant d'ailleurs en physique qu'en mathématiques. Et, à l'heure actuelle, le mouvement continue de manière sensiblement uniforme.

Quant à la sommabilité et au prolongement analytique, il y a