SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES A CENTRE

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES A CENTRE

PAR

E. Lainé (Angers)

Si l'on prend les équations paramétriques d'une ellipse sous la forme

$$x = a \cos \varphi \ , \qquad y = b \sin \varphi \ , \tag{1}$$

on sait qu'il existe, entre les arguments $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, des quatre points où cette ellipse est coupée par une circonférence, la relation simple

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2k\pi \ , \tag{2}$$

où k est un entier quelconque. Cette relation a été établie pour la première fois par Joachimsthal [1].

Proposons-nous plus généralement de trouver une relation simple entre les paramètres angulaires des quatre points d'intersection de l'ellipse (1) et de la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \ . \tag{3}$$

Pour préciser, nous ne considérerons que des courbes réelles.

Faisons dans les équations (1) le changement de variable $z = e^{i\varphi}$, d'où l'on tire

$$x = a\,\frac{z^2+1}{2z} \ , \qquad y = b\,\frac{z^2-1}{2iz} \ .$$

Portant ces valeurs dans l'équation (3), on aura une équation de la forme

$$Aa^2(z^2+1)^2 - 2Biab(z^4-1) - Cb^2(z^2-1)^2 + zP_2(z) = 0 \ ,$$

---

[1] *Journal für reine u. angew. Math.*, 36. 1848.

où $P_2(z)$ désigne un polynôme du second degré au plus. Le produit des racines de cette dernière équation a pour valeur

$$\frac{Aa^2 - Cb^2 + 2Babi}{Aa^2 - Cb^2 - 2Babi},$$

si l'on pose

$$Aa^2 - Cb^2 + 2Babi = \rho e^{i\delta},$$

ce produit s'écrit simplement $e^{2i\delta}$. En revenant à la variable φ, nous aurons la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\delta,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{2Bab}{Aa^2 - Cb^2}, \tag{4}$$

qui comprend évidemment la relation (2) comme cas très particulier.

Remarquons que les deux coniques étant supposées réelles, la somme $\Sigma\varphi$ est toujours réelle.

Considérons de même l'hyperbole

$$x = a \operatorname{ch} \varphi, \qquad y = b \operatorname{sh} \varphi. \tag{5}$$

Si l'on fait le changement de variable $e^\varphi = z$, on aura

$$x = a\frac{z^2+1}{2z}, \qquad y = b\frac{z^2-1}{2z},$$

et l'équation aux z des points d'intersection de l'hyperbole (5) et de la conique (3) sera de la forme

$$Aa^2(z^2+1)^2 + 2Bab(z^4-1) + Cb^2(z^2-1)^2 + zP_2(z) = 0.$$

Le produit des racines de cette équation sera égal à

$$\frac{Aa^2 - 2Bab + Cb^2}{Aa^2 + 2Bab + Cb^2}.$$

En revenant à la variable φ, on aura donc

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \log \frac{Aa^2 - 2Bab + Cb^2}{Aa^2 + 2Bab + Cb^2}. \tag{6}$$

Dans les formules (4) et (6), les fonctions arctangente et logarithme sont prises dans toute leur généralité, de sorte que les seconds membres ne sont déterminés, comme il fallait s'y attendre, qu'à un multiple près de $2k\pi$ pour l'ellipse et de $2k\pi i$ pour l'hyperbole.

Prenons d'abord la formule (4). Pour $B = 0$, elle contient la formule (2), qui est valable pour les quatre points d'intersection de l'ellipse et de toute conique (parabole comprise) ayant mêmes directions d'axes. Comme autre cas simple, on pourra examiner l'hypothèse

$$Aa^2 - Cb^2 = 0 \ .$$

Par exemple, si A et C sont nuls, la conique (3) est une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de l'ellipse: nous l'appellerons hyperbole (H). Il existe dans le plan ∞^3 hyperboles (H), parmi lesquelles figurent les ∞^2 hyperboles d'Apollonius associées à l'ellipse. Pour les quatre points de rencontre d'une hyperbole (H) et de l'ellipse, on a la relation

$$\Sigma\varphi_i = (2k + 1)\pi \ .$$

Soit M_i (φ_i) un point de l'ellipse (1). Le cercle osculateur en M_i coupe l'ellipse en un second point M_i' tel que

$$\varphi_i' + 3\varphi_i = 2k\pi \ .$$

L'hyperbole (H) osculatrice en M_i coupe de même l'ellipse en un autre point M_i'' tel que

$$\varphi_i'' + 3\varphi_i = (2k + 1)\pi \ .$$

Donc, suivant que les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sont sur une circonférence ou sur une hyperbole (H), les quatre points M_i' et les quatre points M_i'' seront aussi sur une circonférence ou sur une hyperbole (H). De même les points M_1'', M_2'', M_3'', M_4'' seront sur une hyperbole (H) ou sur une circonférence, etc. Tous ces théorèmes sont analogues au théorème de Steiner pour les cercles de courbure.

La formule (6) nous permet d'énoncer pour l'hyperbole des propriétés analogues. Si l'on prend $B = 0$, on aura la relation

$$\Sigma\varphi_h = 2k\pi i \ ,$$

qui caractérise les quatre points d'intersection de l'hyperbole avec toute conique ayant mêmes directions d'axes. De même, pour les quatre points d'intersection de l'hyperbole avec une hyperbole (H), on aura la relation

$$\Sigma\varphi_h = (2k+1)\pi i \; .$$

On en déduit un théorème identique à celui que nous venons d'énoncer pour les cercles et les hyperboles (H) osculateurs à l'ellipse.

Cherchons, pour donner une autre application, les cercles qui coupent l'hyperbole en deux points déterminés, φ_3 et φ_4, et la touchent en un autre point d'argument inconnu φ. On devra avoir

$$2\varphi + \varphi_3 + \varphi_4 = 2k\pi i \; ,$$

d'où deux solutions distinctes

$$\varphi_1 = -\frac{\varphi_3+\varphi_4}{2} \; , \qquad \varphi_2 = \pi i - \frac{\varphi_3+\varphi_4}{2} \; .$$

Cherchons de même les hyperboles (H) qui coupent aussi l'hyperbole aux points φ_3 et φ_4, et la touchent en un autre point φ'. On devra avoir

$$2\varphi' + \varphi_3 + \varphi_4 = (2k+1)\pi i \; ,$$

d'où 2 solutions distinctes

$$\varphi_1' = \frac{\pi i}{2} - \frac{\varphi_3+\varphi_4}{2} \; , \qquad \varphi_2' = -\frac{\pi i}{2} - \frac{\varphi_3+\varphi_4}{2} \; .$$

On a d'ailleurs

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi i \; , \qquad \varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3 + \varphi_4 = 0 \; .$$

Donc par deux points réels A et B de l'hyperbole passent deux cercles, (C_1) et (C_2), qui sont tangents à la conique, (C_1) en C_1 et (C_2) en C_2: les points C_1 et C_2 sont réels et diamétralement opposés, et les quatre points A, B, C_1 et C_2 sont situés sur une hyperbole (H). Par les mêmes points A et B passent deux hyperboles (H), soient (H_1) et (H_2), qui touchent l'hyperbole donnée, (H_1) en H_1 et (H_2) en H_2: les points H_1 et H_2 sont imaginaires et diamètralement opposés, et les quatre points A, B, H_1 et H_2 sont situés sur une circonférence.

Le procédé de démonstration employé plus haut se prête encore à d'autres généralisations. Par exemple, si l'on considère une courbe algébrique (C), où les termes de plus haut degré n ne contiennent que les puissances de y de même parité, on aura, pour les $2n$ points d'intersection de (C) et de l'ellipse, la relation

$$\sum_{1}^{2n} \varphi_h = 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \sum_{1}^{2n} \varphi_h = (2k+1)\pi \ ,$$

pour les $2\,n$ points d'intersection de (C) et de l'hyperbole, la relation

$$\sum_{1}^{2n} \varphi_h = 2k\pi i \qquad \text{ou} \qquad \sum_{1}^{2n} \varphi_h = (2k+1)\pi i \ ,$$

suivant que les exposants de y dans les termes de degré n sont pairs ou impairs.

SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS SONT DES DÉTERMINANTS

PAR

Marie BYCK (Kieff).

---

1. On voit aisément que:

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_1 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & p_2 & q_2 \\ 0 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} \ ;$$

de même,

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 & q_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 & q_3 \\ 0 & 0 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} \ , \text{ etc.}$$