

SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS SONT DES DÉTERMINANTS

Autor(en): **Byck, Marie**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515757>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le procédé de démonstration employé plus haut se prête encore à d'autres généralisations. Par exemple, si l'on considère une courbe algébrique (C), où les termes de plus haut degré n ne contiennent que les puissances de y de même parité, on aura, pour les $2n$ points d'intersection de (C) et de l'ellipse, la relation

$$\sum_1^{2n} \varphi_h = 2k\pi \quad \text{ou} \quad \sum_1^{2n} \varphi_h = (2k + 1)\pi ,$$

pour les $2n$ points d'intersection de (C) et de l'hyperbole, la relation

$$\sum_1^{2n} \varphi_h = 2k\pi i \quad \text{ou} \quad \sum_1^{2n} \varphi_h = (2k + 1)\pi i ,$$

suivant que les exposants de y dans les termes de degré n sont pairs ou impairs.

SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS SONT DES DÉTERMINANTS

PAR

Marie BYCK (Kieff).

1. On voit aisément que:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & p_2 & q_2 \\ 0 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} ;$$

de même,

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 & q_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 & q_3 \\ 0 & 0 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} , \text{ etc.}$$

Supposons maintenant que dans le déterminant A les termes a_1, a_2 sont eux-mêmes des déterminants:

$$a_1 = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix}$$

on aura

$$C = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & p_1 & q_1 \\ \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & p_2 & q_2 \\ \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} t_1 & u_1 & p_1 & q_1 \\ t_2 & u_2 & p_2 & q_2 \\ 0 & 0 & m_1 & n_1 \\ r_1 & s_1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

de même:

$$D = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_3 & u_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 & u_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 & u_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 & u_3 & p_3 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & r_1 & s_1 & 0 & 0 \\ v_1 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Passons au cas général lorsque les déterminants qui sont les éléments des déterminants A, B, C, D ne se distinguent pas seulement par une rangée (ligne ou colonne), mais sont arbitraires. Par exemple:

$$A' = \begin{vmatrix} a_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \quad B' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$C' = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_2 & s_2 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_2 & s_2 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_3 & s_3 \\ t_3 & u_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Déterminons x et y de manière que dans le déterminant A' on ait

$$\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ x & y \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$m_2 q_2 - p_2 n_2 = m_1 y - x n_1.$$

Posons :

$$1) \quad m_2 q_2 = m_1 y, \quad 2) \quad p_2 n_2 = n_1 x,$$

d'où :

$$y = \frac{m_2 q_2}{m_1}, \quad x = \frac{p_2 n_2}{p_1}.$$

Nous aurons

$$A' = \begin{vmatrix} a_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & \begin{vmatrix} n_2 p_2 & m_2 q_2 \\ n_1 & m_1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & \frac{n_2 p_2}{n_1} & \frac{m_2 q_2}{m_1} \\ 0 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = - \frac{1}{m_1 n_1} \begin{vmatrix} a_1 & n_1 p_1 & m_1 q_1 \\ a_2 & n_2 p_2 & m_2 q_2 \\ 0 & m_1 n_1 & m_1 n_1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & n_1 p_1 & m_1 q_1 \\ a_2 & n_2 p_2 & m_2 q_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & m_1 q_1 & n_1 p_1 \\ a_2 & m_2 q_2 & n_2 p_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C' = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_2 & s_2 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \frac{r_2 s_2}{s_1} & \frac{u_2 r_2}{r_1} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ \frac{r_2 s_2}{s_1} & \frac{u_2 r_2}{r_1} & n_1 & m_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} t_1 & u_1 & p_1 & q_1 \\ \frac{t_2 s_2}{s_1} & \frac{u_2 r_2}{r_1} & p_2 n_2 & q_2 m_2 \\ 0 & 0 & m_1 & n_1 \\ r_1 & s_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r_1 s_1 m_1 n_1} \begin{vmatrix} t_1 s_1 & r_1 u_1 & p_1 n_1 & m_1 q_1 \\ t_2 s_2 & r_2 u_2 & p_2 n_2 & m_2 q_2 \\ 0 & 0 & m_1 n_1 & m_1 n_1 \\ r_1 s_1 & r_1 s_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} t_1 s_1 & r_1 u_1 & p_1 n_1 & m_1 q_1 \\ t_2 s_2 & r_2 u_2 & p_2 n_2 & m_2 q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 u_1 & t_1 s_1 & m_1 q_1 & p_1 n_1 \\ r_2 u_2 & t_2 s_2 & m_2 q_2 & p_2 n_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Et en général:

$$\left| \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & b_1 & e_1 f_1 \\ \hline c_1 & d_1 & g_1 h_1 \\ \hline k_1 & l_1 & m_1 n_1 \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccccc} a_1 d_1 & c_1 b_1 & e_1 h_1 & g_1 f_1 & k_1 n_1 & m_1 l_1 \\ a_2 d_2 & c_2 b_2 & e_2 h_2 & g_2 f_2 & k_2 n_2 & m_2 l_2 \\ a_3 d_3 & c_3 b_3 & e_3 h_3 & g_3 f_3 & k_3 n_3 & m_3 l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Si dans cette égalité nous posons:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 = a_1, & f_3 &= f_2 = f_1, \\ b_3 &= b_2 = b_1, & k_3 &= k_2 = k_1, \\ e_3 &= e_2 = e_1, & l_3 &= l_2 = l_1, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_1 d_1 & c_1 b_1 & e_1 h_1 & g_1 f_1 & k_1 n_1 & m_1 l_1 \\ a_1 d_2 & c_2 b_1 & e_1 h_2 & g_2 f_1 & k_1 n_2 & m_2 l_1 \\ a_1 d_3 & c_3 b_1 & e_1 h_3 & g_3 f_1 & k_1 n_3 & m_3 l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= a_1 b_1 e_1 f_1 k_1 l_1 \left| \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline d_1 & c_1 & h_1 & g_1 & n_1 & m_1 \\ \hline d_2 & c_2 & h_2 & g_2 & n_2 & m_2 \\ \hline d_3 & c_3 & h_3 & g_3 & n_3 & m_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{l_1} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{e_1} & \frac{1}{f_1} & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right| =$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} d_1 & c_1 & h_1 & g_1 & n_1 & m_1 \\ d_2 & c_2 & h_2 & g_2 & n_2 & m_2 \\ d_3 & c_3 & h_3 & g_3 & n_3 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & k_1 \\ 0 & 0 & f_1 & e_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cccccc} c_1 & d_1 & g_1 & h_1 & m_1 & n_1 \\ c_2 & d_2 & g_2 & h_2 & m_2 & n_2 \\ c_3 & d_3 & g_3 & h_3 & m_3 & n_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & l_1 \\ 0 & 0 & e_1 & f_1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

ce qui est d'accord avec D.

2. — Réduction du déterminant de l'ordre $2q$ en un déterminant de l'ordre q . — Le résultat obtenu suggère l'idée de l'abaissement de l'ordre du déterminant, par une simple soustraction de colonnes; la seconde de la première; la quatrième de la troisième, etc. Dans le cas où nous avons un déterminant de la forme

$$\begin{vmatrix}
 a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & \dots & \dots & \dots & a_1^{2q-1} & a_1^{2q} \\
 a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & \dots & \dots & \dots & a_2^{2q-1} & a_2^{2q} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_q^1 & a_q^2 & a_q^3 & a_q^4 & \dots & \dots & \dots & a_q^{2q-1} & a_q^{2q} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{vmatrix},$$

les opérations indiquées conduisent au déterminant:

$$\begin{vmatrix}
 a_1^1 - a_1^2 & a_1^3 - a_1^4 & \dots & \dots & a_1^{2q-1} - a_1^{2q} \\
 a_2^1 - a_2^2 & a_2^3 - a_2^4 & \dots & \dots & a_2^{2q-1} - a_2^{2q} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_q^1 - a_q^2 & a_q^3 - a_q^4 & \dots & \dots & a_q^{2q-1} - a_q^{2q}
 \end{vmatrix}.$$

On voit donc qu'après avoir transformé un déterminant arbitraire d'ordre $2q$ en un autre qui présente en des places convenablement choisies des zéros et des unités, on peut, par de simples soustractions, le ramener à un déterminant d'ordre q .