R. Fueter. — Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band XLI, 1).

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

vectorielle élémentaire, la géométrie réglée, la géométrie des éléments (points, plans et droites) cotés, la théorie des dynames et une étude très poussée du cylindroïde de Plücker. Cailler se sert avec prédilection des coordonnées complexes de la droite, qui représentent l'espace réglé sur les points complexes d'une sphère. Cette identification (qu'on doit à Study dans sa « Geometrie der Dynamen » et dont Blaschke se sert aussi dans sa « Differentialgeometrie ») permettra par exemple de ramener l'étude du mouvement quelconque d'un corps solide à celle d'une rotation autour d'un point fixe. Mais c'est surtout pour la composition des dynames que Cailler en fait un usage systématique et particulièrement heureux.

La troisième partie est consacrée aux déplacements finis et contient entre autres les transformations orthogonales à 3 et 4 indéterminées, la théorie des quaternions (et biquaternions) et enfin la Géométrie des corps solides, dont Cailler s'était occupé à diverses reprises. La quatrième partie enfin étudie la cinématique et les mouvements infinitésimaux. Citons-en un beau chapitre sur les mouvements de roulement.

Ce livre mérite d'être lu. Il faut féliciter MM. Fehr et Wavre de l'œuvre de pieuse amitié qu'ils ont accomplie, en s'occupant de sa mise au point et de sa parution.

F. Gonseth (Berne).

R. Fueter. — **Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.** (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band XLI, 1). — 1 vol., gr. in-8°, VI et 142 p.; prix G.-M. 5.60, relié G.-M. 7; B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1924.

C'est en 1853 que, dans une note malheureusement trop brève, Kronecker donnait un premier résumé de ses recherches sur les équations abéliennes. Elles aboutissaient à ce théorème qui est certainement parmi les plus beaux qu'on connaisse en mathématiques: les racines des équations abéliennes absolues sont des fonctions rationnelles des racines de l'unité, et par conséquent les équations abéliennes absolues sont fournies par les équations de la division du cercle. Qu'arrive-t-il lorsque les équations envisagées sont abéliennes dans un domaine de nombres algébriques quelconques ? Kronecker semble entrevoir un théorème plus général, mais ce n'est que quelques années plus tard que sa pensée se précise. Conduit par ses recherches sur les fonctions elliptiques à étudier une catégorie particulière d'équations abéliennes, c'est à ces équations remarquables, abéliennes dans un corps quadratique imaginaire, qu'il cherche à étendre son grand théorème de 1853. Guidé par l'analogie, il affirme que le rôle des équations de la division du cercle est joué dans ce cas par les équations de transformation des fonctions elliptiques à modules singuliers. Ici encore Kronecker se borne à quelques indications, sans jamais donner de démonstration proprement dite. On sait que H. Weber, qui s'était longuement occupé de ces problèmes, a donné en 1886 une démonstration rigoureuse du premier théorème de Kronecker; il n'a pas réussi à démontrer le second, dont Kronecker était particulièrement fier et qu'il appelait son « liebster Jugendtraum ».

Il appartenait à M. Fueter de combler cette lacune. Un premier pas important a été fait par lui dans sa thèse inaugurale publiée en 1903.

Depuis lors il n'a cessé de s'occuper du grand problème qu'il a cherché à aborder par des côtés différents, poussant parfois la généralisation au-delà des conditions envisagées par Kronecker. Il a eu du reste des surprises. Des cas d'exception se sont présentés, qui ont dû être traités à part, et ce n'est qu'en 1920 que les dernières difficultés ont pu être aplanies. Enfin M. Fueter s'est aperçu récemment que les modules singuliers et les racines de l'unité pouvaient être remplacés par les valeurs singulières des fonctions elliptiques, d'où une simplification importante, les racines des équations de Kronecker s'exprimant directement à l'aide de ces irrationnelles.

C'est le résultat de toutes ces belles et patientes recherches, entreprises par Kronecker, continuées par H. Weber et M. Hilbert, reprises par lui-même que M. Fueter vient exposer dans ses leçons sur les modules singuliers et la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques. Cette monographie sur un sujet peu connu, première tentative, si je ne me trompe, de grouper sous une forme didactique tant d'admirables découvertes, ne suppose que la connaissance des éléments de la théorie des fonctions, des principes de l'algèbre et de la théorie des nombres. Les lecteurs auxquels elle s'adresse seront donc nombreux et à plus d'un elle inspirera, je n'en doute pas, le goût de ces belles recherches, un peu délaissées aujourd'hui.

L'ouvrage de M. Fueter comprendra deux parties. Dans la première, qui vient de paraître, l'auteur expose les théories spéciales qui constituent la base de l'édifice: théorie des groupes et des fonctions modulaires, équations de transformation, théorie arithmétique du corps quadratique imaginaire, qui gagnerait, je crois, à être exposée sous une forme un peu moins concise, théorie des fonctions elliptiques, esquissée à grands traits, et surtout cette belle multiplication complexe, dont la découverte remonte à Abel, et qui fournit les éléments ultimes à partir desquels se construisent les racines des équations abéliennes de Kronecker. Ce qui frappe dans cet exposé et ce qui en fait le charme, c'est la simplicité et l'élégance des méthodes employées; je signalerai par exemple son esquisse de la théorie du groupe modulaire et en particulier la détermination du domaine fondamental, et surtout son exposé de la théorie des modules singuliers et des fonctions elliptiques qu'il a considérablement simplifiée.

Cette large synthèse de recherches parfois disparates est faite avec art et un sentiment de la mesure, assez rare à notre époque de productions hâtives. D. Mirimanoff (Genève).

V. Volterra et J. Pérès. — **Leçons sur la composition et les fonctions permutables** (Collection E. Borel). 1 vol. gr. in-8° de VIII–184 pages; 20 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1924.

Ces captivantes théories, qui font suite à celles déjà exposées sur les fonctions de ligne, éveillent, dès les premières pages, des réminiscences relatives au Calcul tensoriel et à la Théorie des Groupes de S. Lie. Il s'agit de déterminants ou de matrices dont certaines propriétés de symétrie sont conservées quand les indices des éléments deviennent des variables continues; des sommes finies deviennent des intégrales et le signe d'intégration est sous-entendu (ou simplement indiqué par un astérisque) quand la variable d'intégration figure dans deux facteurs, de même qu'en Calcul tensoriel un indice répété deux fois entraîne une sommation.

Un produit $f(x, \xi)\, g(\xi, \varphi)$, à intégrer en ξ, n'est pas sans analogie avec