Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LES RECHERCHES RÉCENTES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Autor: Cartan, E.

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515748

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

d'être indiqué à une surface ordinaire, regardée comme un espace de Riemann à deux dimensions défini par le ds^2 de la surface, le raccord de proche en proche des plans (euclidiens) tangents à une ligne AB tracée sur la surface est identique au développement classique sur un plan de la développable circonscrite à la surface le long de AB.

Comme on le voit, la notion de parallélisme de M. Levi-Civita permet d'assimiler à un vrai espace euclidien, ou du moins à une portion de cet espace, toute la région d'un espace de Riemann qui avoisine un arc de courbe quelconque AB tracé dans l'espace donné. La différence essentielle qui subsiste encore entre un espace de Riemann et l'espace euclidien est la suivante: Si l'on joint un point A à un point B par deux chemins différents, ACB, AC'B, et qu'on développe sur l'espace euclidien tangent en A les deux régions qui entourent ces deux chemins, on n'obtiendra dans les deux cas, pour le point B et le petit morceau d'espace qui l'entoure, ni la même position ni la même orientation. Autrement dit, le développement de l'espace euclidien tangent, quand on se déplace dans l'espace de Riemann, n'est pas *holonome*. Au lieu de dire que l'espace de Riemann est à connexion euclidienne, on peut dire que c'est un espace euclidien non holonome. Mais il est important de remarquer qu'il ne l'était pas par lui-même, je veux dire par son seul ds^2; *il l'est devenu par la définition du parallélisme de M. Levi-Civita.*

III

Cette manière d'envisager la notion de parallélisme est, je crois, celle qui va le mieux au fond des choses. Ce serait restreindre sa portée que de n'y voir, comme on l'a fait en général, qu'un procédé de comparaison des vecteurs issus de deux points infiniment voisins; il faut y voir au contraire un moyen d'introduire dans un espace de Riemann toute la gamme des déplacements de l'espace euclidien, du moins en ce qui concerne les effets qu'ils produisent dans une région infiniment petite de l'espace.

Le point de vue habituel permet la fondation de la géométrie affine non holonome, parce que la notion de l'équipollence de

deux vecteurs a un sens dans l'espace affine; le second point de vue seul permet la fondation de la géométrie projective ou de la géométrie conforme non holonomes, bien que la notion de vecteurs équipollents n'ait aucun sens dans l'espace projectif et que la notion elle-même de vecteur n'ait aucun sens dans l'espace conforme.

Pour définir par exemple un espace projectif non holonome (ou un espace à connexion projective), on imaginera, en chaque point d'un espace supposé initialement dénué de toute propriété géométrique, un espace projectif tangent, ainsi qu'une loi permettant le raccord en un seul des espaces projectifs tangents en deux points infiniment voisins. Cette loi permet alors le développement, sur l'espace projectif tangent en un point A, d'une ligne quelconque AB et de la région de l'espace donné avoisinant immédiatement cette ligne. Cette loi ne sera soumise *a priori* qu'aux restrictions habituelles en géométrie différentielle (linéarité des composantes de la connexion projective par rapport aux différentielles des coordonnées, existence de dérivées jusqu'à un certain ordre, etc.).

D'une manière générale, à tout groupe continu G correspond, dans la conception de M. Klein, une géométrie holonome; dans la conception nouvelle, il lui correspond une infinité de géométries non holonomes. La géométrie des espaces de Riemann correspond au groupe des déplacements euclidiens, et *ce n'est même pas la plus générale de cette espèce*, car, un ds^2 étant donné, on peut imaginer une infinité de lois de parallélisme autres que celle de M. Levi-Civita; toutes sont également légitimes; nous verrons dans un instant ce qui différencie celle de M. Levi-Civita de toutes les autres. Les espaces de M. Weyl constituent de même une catégorie particulière des espaces non holonomes admettant pour groupe fondamental le groupe des déplacements et des similitudes; les espaces d'Eddington correspondent au groupe des transformations affines.

En résumé, dans les généralisations précédentes, l'idée directrice est la suivante. Dans un espace holonome au sens de M. F. Klein, tout est commandé par le groupe fondamental et ses différentes opérations. Ce sont ces opérations qui font de l'espace un tout organique. Dans les espaces non holonomes, ce sont

encore les opérations du groupe qui sont un principe d'organisation, mais uniquement de proche en proche. C'est précisément en analysant ce que cette organisation a d'incomplet que nous allons arriver au rôle tout à fait nouveau que va jouer encore la notion de groupe dans les géométries nouvelles.

IV

Prenons par exemple un espace de Riemann et considérons dans cet espace un contour fermé partant d'un point A. Développons de proche en proche, sur l'espace euclidien tangent en A, l'espace euclidien tangent aux différents points du contour. Le petit morceau d'espace qui entoure le point A prendra, suivant qu'on considère ce point comme point de départ ou point d'arrivée, deux positions différentes dans l'espace sur lequel se fait le développement, et on passera de la position finale à la position initiale par un certain déplacement euclidien, que nous dirons *associé* au contour fermé; c'est un déplacement, répétons-le, qui opère dans l'espace euclidien tangent en A; bien qu'il ait été défini par ses effets sur le point A et son voisinage, on peut évidemment l'appliquer à n'importe quelle figure (F) tracée dans l'espace euclidien tangent en A.

Considérons maintenant les différents contours fermés partant d'un point donné A. *Les différents déplacements euclidiens qui leur sont associés forment un groupe.*

Soient en effet deux contours fermés (C_1) et (C_2) partant de A. Soient D_1 et D_2 les déplacements qui leur sont associés; soit enfin (C) le contour fermé obtenu en décrivant successivement (C_1) et (C_2), et D le déplacement associé à (C). Une figure (F) tracée dans l'espace euclidien tangent en A prendra respectivement, après développement du contour (C_1) ou du contour (C_2), la position (F_1) ou la position (F_2); après développement du contour total (C), elle prendra une position (F′) placée par rapport à (F_1) comme (F_2) est placée par rapport à (F); autrement dit le déplacement D qui amène (F′) en (F) est la résultante du déplacement D_2 qui amène (F′) en (F_1) et du déplacement D_1 qui amène (F_1) en (F). La relation

$$D = D_2 D_1$$