Sur la dérivation des séries terme à terme.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la dérivation des séries terme à terme.

Etant donnée une série $\sum u_k(x)$ *convergente pour toute valeur de* x *appartenant à un intervalle donné* (a, b), *si les dérivées* $u'_k(x)$ *des termes de cette série sont des fonctions bien définies de* x *partout dans l'intervalle considéré, et si, de plus, la série* $\sum u'_k(x)$ *est uniformément convergente dans cet intervalle, cette dernière série représente, dans l'intervalle* (a, b), *la dérivée de la fonction* $f(x)$ *définie par la série proposée.*

Pour démontrer ce théorème je m'appuie: 1° sur le théorème des accroissements finis, applicable, comme on sait, à une fonction d'une variable dans tout intervalle où cette fonction admet une dérivée partout bien définie; 2° sur le fait qu'une série qui a pour termes des fonctions de x continues dans un intervalle donné, et qui, en outre, est uniformément convergente dans cet intervalle, représente, dans cet intervalle, une fonction continue de x.

Soient x et x_0 deux nombres quelconques de l'intervalle (a, b). On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0}\,. \tag{1}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} \quad \text{pour} \quad x \neq x_0 & (2)\\ \varphi_k(x_0) &= u'_k(x_0)\,. & (3) \end{aligned}\right\} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Les fonctions φ_k ainsi définies sont évidemment continues pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b). De plus, je dis que la série $\sum\varphi_k(x)$ est uniformément convergente dans cet intervalle. En effet, pour chaque couple d'entiers positifs n et p, on a

$$\sum_{n+1}^{n+p} \varphi_k(x) = \sum_{n+1}^{n+p} u'_k(\xi_{n,p})\,, \tag{4}$$

$\xi_{n,p}$ représentant un nombre compris dans l'intervalle (x_0, x). Cette relation, qui se réduit à une identité en vertu de (3), quand $x = x_0$, se déduit de (2), quand x est différent de x_0, en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $\sum_{n+1}^{n+p} u_k(x)$ à dérivées bien définies partout dans l'intervalle (a, b). Or, soit une quantité positive ε choisie à l'avance aussi petite que l'on voudra; par hypothèse, on aura, à partir d'une valeur de l'entier n suffisamment grande, quel que soit l'entier positif p, et pour toute valeur de ξ appartenant à l'intervalle (a, b):

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} u'_k(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{2} , \qquad \left| \sum_{n+p+1}^{\infty} u'_k(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

donc

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} u'_k(\xi) \right| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} u'_k(\xi) - \sum_{n+p+1}^{\infty} u'_k(\xi) \right| < \varepsilon .$$

donc, en vertu de (4), pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b)

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \varphi_k(x) \right| < \varepsilon .$$

La convergence uniforme de la série $\Sigma \varphi_k(x)$ dans l'intervalle (a, b) est ainsi établie. Cette série représente donc dans cet intervalle une fonction continue de x, et l'on pourra en particulier écrire

$$\lim_{x=x_0} \sum \varphi_k(x) = \sum \varphi_k(x_0) ,$$

c'est-à-dire, en vertu de (2), (1) et (3)

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum u'_k(x_0) .$$

C. Q. F. D.

Ce théorème[1] se trouve démontré d'une manière un peu différente dans les deux dernières éditions du *Cours d'Analyse* de M. Goursat.

15 novembre 1926. W. Rivier (Lausanne).

[1] On trouvera une forme plus générale de ce théorème dans le traité de H. Knopp, *Theorie u. Anwendung der unendlichen Reihen*, p. 343, Satz 4, 2e édition. — Note de la Rédaction.