BIBLIOGRAPHIE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

BIBLIOGRAPHIE

H. ANDOYER. — **Cours de Mécanique céleste.** Tome II. — 1 vol. in-8° de 451 p.; Fr. 90; Gauthier-Villars & C^ie^, Paris.

Ce Tome II comprend la suite de la théorie des planètes, la théorie de la Lune, la théorie du mouvement de rotation de la Terre et de la Lune autour de leurs centres de gravité et la théorie des anciens satellites de Jupiter: quatre grands problèmes de la Mécanique Céleste, traités incontestablement avec élégance et un grand souci de concision. D'ailleurs, on aperçoit rapidement que ces questions fondamentales sont présentées par un astronome qui vise à obtenir un résultat concret; ses développements analytiques sont constamment accompagnés de conclusions numériques; le lecteur, à chaque pas, est ainsi averti que le but est atteint; et cela contribue fortement à donner une idée exacte de l'importance des problèmes à résoudre et de leurs réalités.

Les deux premiers problèmes, les plus importants, accaparent les Livres III et IV du présent tome, de beaucoup les plus volumineux. Les Livres V et VI sont réservés aux deux derniers problèmes.

Le premier chapitre du Livre III qui est le 14^me^ de l'ouvrage entier, est consacré aux équations du mouvement des planètes, suivant la méthode de la variation des constantes. La fonction perturbatrice, désignée par V, est une somme de termes de la forme fm'R; et le développement de R a été donné dans le premier volume. L'auteur arrive ainsi, dès le début du livre, à présenter les développements des seconds membres des équations du problème. Et du même coup, on aperçoit la nécessité de choisir, pour les intégrer, une méthode d'approximations successives. Puis, on voit intervenir les perturbations ou inégalités d'ordre p; ce qui conduit immédiatement au fameux théorème de l'invariabilité des grands axes, dû à Laplace, Lagrange et Poisson. On voit encore que le nombre des termes utiles, à prendre dans les développements obtenus pour les inconnues par la méthode précédente, est limité; et l'on arrive à une solution satisfaisante, du point de vue pratique, mais valable seulement pour un intervalle de temps borné.

Le chapitre suivant, le 15^me^, est consacré au calcul effectif des perturbations des éléments et des perturbations des coordonnées. L'auteur y montre différents choix que l'on peut faire pour les constantes qui resteront dans les équations; il insiste sur le fait que leurs valeurs ne pourront résulter que de la comparaison de la théorie aux observations précises. Ici, Jupiter, Saturne, Uranus sont mis à contribution.

Le chapitre 16^me^ donne de nouvelles méthodes pour le calcul des perturbations du mouvement des planètes. Il s'agit ici de méthodes permettant d'arriver, plus vite que par la méthode de la variation des constantes, à la détermination des inégalités des coordonnées; l'auteur expose les deux méthodes de Laplace et de Hansen; celle de Laplace a été utilisée par Newcomb pour les nouvelles théories de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Uranus et Neptune; celle de Hansen a été appliquée par Hill aux cas de Jupiter et de Saturne. L'auteur apporte d'ailleurs, à l'une ou à l'autre de ces méthodes, des modifications importantes. D'autre part, ayant établi la solution du problème par une des nouvelles méthodes, l'auteur se donne la peine de la comparer aux résultats dus à la méthode de la variation des constantes.

Il s'agit ensuite de montrer que c'est surtout dans l'application numérique qu'une méthode comme celle de Hansen s'avère avantageuse. Et cela amène tout naturellement le chapitre 17^{me}, qui traite du développement numérique des perturbations. L'auteur expose pourquoi les développements purement analytiques, présentés par les trois méthodes de résolution signalées plus haut, sont désavantageux; et comment l'on est amené à recourir aux méthodes d'interpolation. Il explique la méthode due à Cauchy, qui s'applique aisément au calcul numérique des coefficients des perturbations, dans la marche de Hansen. Le calcul est indiqué jusqu'aux perturbations du deuxième ordre, par rapport aux masses perturbatrices. On trouve encore dans ce chapitre l'exposé d'une méthode pour déterminer les perturbations séculaires du premier ordre des éléments osculateurs du mouvement d'une planète, où l'auteur suit les principes établis primitivement par Gauss.

Le chapitre 18^{me}, consacré aux théorèmes généraux relatifs aux inégalités séculaires et à longue période, est destiné à combler en partie le déficit fatal des solutions précédentes; celles-ci, à cause de la présence de termes séculaires et de termes mixtes, ne peuvent être valables que pour un intervalle de temps borné; or, on peut souhaiter obtenir des résultats valables pour de plus longues durées. S'inspirant des travaux de H. Poincaré, l'auteur établit, en fin de compte, comment on peut remplacer les termes séculaires principaux de la théorie des planètes par des termes périodiques, au moins dans les cas où l'on néglige les puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons. Il indique quelles conclusions curieuses on peut déduire de cette transformation, en ce qui concerne la stabilité du système solaire; et il montre les objections que l'on peut faire.

Le Livre IV est consacré à la théorie de la Lune. On sait que ce problème est un des plus difficiles de la mécanique céleste, et l'un des plus importants. On sait aussi combien ce problème est familier à l'auteur; dans le chapitre 19^{me}, il l'expose avec adresse, signalant les difficultés de tous ordres qui se présentent, ainsi que les moyens d'éviter de trop longs développements; il fait emploi des remarquables travaux de G. W. Hill et de M. E. W. Brown. Il montre, en particulier, comment la solution analytique du problème, si nécessaire du point de vue théorique et dans certaines applications, est désavantageuse d'une façon générale pour le calcul des valeurs numériques des inégalités du mouvement de la Lune avec une approximation suffisante; et sa conclusion est que ces valeurs numériques doivent être calculées directement.

Le chapitre 20^{me} est réservé à l'exposé de la théorie de Brown. Le calcul des valeurs numériques des coefficients y est complètement développé. Et l'auteur fournit les développements de quelques fonctions, nécessaires pour appliquer les formules de la théorie précédente, et qui n'ont pas encore été donnés.

Dans les deux chapitres qui suivent, l'auteur donne une nouvelle méthode pratique pour le calcul des inégalités du mouvement de la Lune. La méthode de Brown, satisfaisante du point de vue théorique, l'est un peu moins du point de vue pratique, car elle exige des développements en séries fort pénibles à établir. La méthode proposée par M. Andoyer permet de déterminer, avec moins de peine, les inégalités du mouvement, d'abord celles dépendant de l'excentricité et de l'inclinaison, puis celles dépendant de l'excentricité et de la parallaxe solaires.

Après quoi, avec le chapitre 23^{me}, l'on reprend le problème de la Lune par la méthode de la variation des éléments. L'auteur présente un procédé d'approximations successives, que fournit immédiatement la dite méthode. Et il compare les résultats de ce nouveau calcul à ceux obtenus dans les chapitres précédents.

Le chapitre 24^{me} étudie les équations générales dont dépendent les perturbations de la théorie solaire du mouvement de la Lune. C'est là une reprise du problème par les théories générales qui ont fait l'objet du chapitre II du premier volume de l'ouvrage. Les valeurs numériques sont établies ici avec une approximation qui sera presque toujours suffisante. Et cette application directe des théories générales permet de traiter le problème des accélérations séculaires.

Le dernier chapitre du Livre s'occupe des inégalités secondaires du mouvement de la Lune. On y constate que le calcul de ces inégalités, dues aux diverses fonctions perturbatrices, est un travail considérable et minutieux; on s'en rendra compte si l'on sait que beaucoup de ces inégalités sont sensibles au centième de seconde d'arc près, mais que très peu d'entre elles atteignent une seconde. L'auteur se borne d'ailleurs au calcul approché des inégalités les plus importantes; pour les autres, il expose les méthodes générales à suivre.

Le Livre V traite du mouvement de rotation de la Terre et de la Lune autour de leurs centres de gravité.

L'auteur étudie d'abord la théorie relative à la Terre, en rapportant directement le mouvement de la Terre au plan de l'écliptique mobile. Les calculs sont développés d'une façon très claire; les données numériques résultent des calculs faits dans les livres précédents; et celles fournies par l'observation sont empruntées à S. Newcomb. Le problème est envisagé du point de vue analytique; et l'on y fait l'hypothèse essentielle que la Terre est assimilable à un corps solide. L'auteur prend soin de signaler que, si l'on voulait pousser l'étude plus loin, il serait nécessaire d'examiner dans quelle mesure les observations, en particulier celles de la variation des latitudes, justifient l'hypothèse en question.

Le problème du mouvement de rotation de la Lune est traité de la même façon que celui de la rotation de la Terre.

Le Livre VI entreprend la théorie des quatre anciens satellites de Jupiter. C'est un problème nettement défini mais très complexe car il dépend d'un grand nombre de constantes difficiles à déterminer d'une façon précise.

Le premier des deux chapitres qui lui sont consacrés s'occupe des équations du problème, le plan de référence des xy étant le plan moyen de l'orbite de Jupiter à l'origine du temps (1900, janvier 0,0; temps moyen de Greenwich). L'auteur y applique la méthode générale de la variation des constantes et il établit les coefficients numériques des équations.

Au dernier chapitre, il montre la détermination approchée du mouvement des satellites; il procède par approximations successives, en suivant les principes généraux exposés au chapitre 18^{me}; puis il indique de quelle façon il faudra tenir compte des perturbations du mouvement képlérien de Jupiter.

Et il termine en faisant remarquer que la véritable difficulté de ce problème consiste dans la détermination effective des constantes dont il dépend, en particulier des masses des satellites.

L'ouvrage de M. Andoyer présente certainement les applications des grandes théories de la Mécanique Céleste sous une forme originale. Il a le mérite de ne rien dissimuler des difficultés rebutantes des calculs; et ce premier mérite s'accompagne d'un second, non moins grand, qui est d'indiquer comment on peut se tirer d'affaire avec la moindre peine.

G. Tiercy (Genève).

Th. De Donder. — **Théorie des champs gravifiques** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XIV). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Ce fascicule complète naturellement le fascicule VIII déjà publié dans le « Mémorial » par M. De Donder et analysé ici même page 154 du présent volume.

L'exposition de l'auteur a toujours eu un caractère de particulière originalité; il ne recourt point au calcul différentiel absolu, ni beaucoup même aux développements modernes de la géométrie différentielle, pour s'appuyer surtout sur le principe d'Hamilton et la méthode variationnelle, ce qui d'ailleurs est conforme aux méthodes originelles d'Einstein.

L'avantage du procédé est d'abord de mettre immédiatement en évidence les symétries tensorielles fondamentales tout en parlant, autant qu'il est possible, le langage de la Mécanique ordinaire; c'est ainsi, par exemple, que la notion générale de *tenseur phénoménal* est identifiée avec celle de *force totale généralisée.*

De telles préoccupations s'accusent mieux encore dans l'étude du champ massique où la théorie est mise d'accord avec les notions de « mesures physiques »; elle peut redonner le tenseur ordinaire de l'élasticité d'après Cauchy et de telles coïncidences aident puissamment à la compréhension subséquente de la théorie einsteinienne. Alors que la conception de Minkowski réunissait l'espace et le temps, ce qui était fort commode dans un monde idéal où on n'imaginait que de la lumière, M. De Donder essaie ici de ne pas abuser de l'espace-temps, abus qui n'est pas sans inconvénients dans le monde physique réel où les expérimentateurs sont habitués à mesurer différemment l'espace et le temps.

Le champ gravifique électromagnétique est le domaine par excellence des belles symétries analytiques; il est « maxwellien » non parce que Maxwell a découvert quelque vérité (?) qui s'impose désormais à toutes les théories, mais parce que jamais équations physiques ne s'approchèrent autant des principes de la connaissance analytique que les équations de Maxwell. Ce rôle primordial va simplement et aisément de pair avec celui des formes lagrangiennes et hamiltoniennes. Sans doute des difficultés subsistent dans un Univers où le champ électromagnétique pénètre la matière en mouvement; l'image ici esquissée n'en représente point toute la complexité mais l'admirable beauté de cette image ne doit susciter que des perfectionnements et non de stériles critiques.

A. BUHL (Toulouse).

S. ZAREMBA. — **La Logique des Mathématiques** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XV). — Un fascicule gr. in-8° de 52 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1926.

La « Logique des Mathématiques » dont il s'agit ici est fort voisine de la « Logique mathématique » des Peano, Boole, Whitehead, Russell, Schröder, etc. Elle s'appuie sur les travaux de tels auteurs. Mais alors que chez ceux-ci, surtout chez Peano, le symbolisme jouait un rôle presque exclusif avec des pages et des pages où l'on ne trouvait pas un mot de langage ordinaire, M. Zaremba est de ceux qui parlent, au contraire, le langage de tout le monde pour construire et poursuivre les conséquences du symbolisme logique. Ceci a sans doute une plus grande valeur scientifique, car c'est faire rentrer la Logique dans une théorie ordinaire de la Connaissance et non paraître croire qu'elle exige un appareil extraordinaire.

L'auteur est d'une franchise que, pour ma part, j'approuve sans la moindre réserve, mais à laquelle beaucoup d'esprits sont encore réfractaires à l'heure actuelle. Il dénonce le caractère « si décevant » de l'intuition directe, caractère que les mathématiciens connaissent bien mais dont beaucoup de physiciens ne semblent même pas se douter, ce qui ne les empêche pas de déplorer les contradictions nombreuses auxquelles aboutissent nombre de théories physiques. Il rencontre aussi la vérité (?) et s'il n'écrit pas le point d'interrogation il n'en réduit pas moins la fugitive déesse à un simple concept qui doit exister au même titre que le raisonnement lui-même, mais qui n'est nullement l'être absolu, extérieur à nous, à laquelle tant de gens croient en s'étonnant de ne pas voir la Science lui découvrir un visage définitif. Les expressions « proposition vraie « et « proposition fausse » sont considérées comme claires par elles-mêmes. C'est tout. Avis à ceux qui cherchent des *définitions* du vrai. A propos des « ensembles » l'auteur reprend une idée de Poincaré; les paradoxes de la théorie proviennent de la confusion de la notion d'ensemble avec des notions plus générales.

Il serait maintenant difficile de suivre M. Zaremba sans reproduire quelque chose du symbolisme, cependant très sobre, qu'il emploie, mais nous pouvons au moins noter quelques traits particulièrement saillants. Ainsi un ensemble de propositions peut constituer, par analogie avec un ensemble de coordonnées, un *point logique* d'où dérivent des fonctions de tels points. La démonstration mathématique n'est de la nature du syllogisme que dans des cas très particuliers.

Des esprits de premier ordre ont jugé évidentes des propositions qui furent classées ensuite parmi les fausses. Une proposition logique peut relever d'une fonction logique portant de grands caractères d'indétermination. Mais nous nous arrêtons, la curiosité pour le beau fascicule de M. Zaremba nous semblant bien suffisamment éveillée.

A. BUHL (Toulouse).

A. Buhl. — **Formules stokiennes** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XVI). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1926.

Les formules stokiennes, comme le nom l'indique, sont des généralisations de la formule de Stokes ordinaire établie dans tous les Traités d'Analyse ou de Mécanique pour le cas de l'espace à trois dimensions. Elles se présentent sous forme d'égalités entre intégrales multiples, l'une de ces intégrales étant étendue à une *cloison* à $p - 1$ dimensions dans l'espace E_n, l'autre à la variété frontière, à $p - 2$ dimensions, de cette cloison.

Ces formules se peuvent engendrer par des transformations et associations répétées d'identités telles que

$$\int_c \mathrm{X}d\mathrm{Y} = \int\int_s d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\,, \quad \int\int_s \mathrm{X}d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} = \int\int\int_v d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}\,, \ldots \tag{1}$$

ce qui est de la plus haute importance pour l'esprit qui aime à remonter aux origines et aux principes.

La seconde des identités indiquées donne une formule stokienne qui impose immédiatement une forme générale des équations électromagnétiques de Maxwell-Lorentz; les formules stokiennes se conservent quand on y remplace les ∂ des dérivées partielles ordinaires par des D plus généraux qui sont les symboles de la dérivation covariante, d'où des formules en D qui sont celles de la Gravifique d'Einstein. Arriver là, très rapidement, en partant d'identités telles que (1) est, à coup sûr, digne de remarque.

A y regarder de près, la Mécanique classique a déjà utilisé des symétries analytiques du même genre; les équations canoniques et le théorème de Poisson ont une symétrie *antistokienne*. Les travaux de Poincaré, également admirables en Physique mathématique et en Mécanique céleste se sont appuyés sur cette opposition. Ces idées générales ont d'ailleurs reçu un commencement de développement en deux articles récemment publiés par *L'Enseignement mathématique* (T. 23, 1923, p. 268 et T. 24, 1924-25, p. 189).

N'oublions point la Théorie des Groupes que l'on peut aussi rapprocher avec fruit des formules stokiennes. Il y a même un parallélisme simple et intéressant à établir entre les grandes voies suivies par Lie d'une part et Einstein d'autre part. Bien des méthodes s'offrent pour faire de telles comparaisons, mais il y a un intérêt particulier à montrer que la formule de Stokes, née avec l'électromagnétisme d'Ampère, était bien la souche d'où pouvaient jaillir par la suite les plus importantes ramifications de la Géométrie et de la Physique mathématique.

H. Fehr.

G. Valiron. — **Théorie générale des Séries de Dirichlet** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XVII). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1926.

Les séries de Dirichlet sont des séries d'exponentielles, chaque terme ayant un coefficient a_n et un exposant $- \lambda_n s$. Pour $\lambda_n = n$ ces séries se ramènent évidemment aux séries entières; pour $\lambda_n = \log n$ elles prennent la forme surtout considérée par Dirichlet, forme qui, avec les a_n tous égaux, conduit à la célèbre fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Ceci suffit déjà amplement à montrer leur importance.

Bien que toutes les séries de Dirichlet ne soient évidemment pas du type où λ_n est égal à n, on se rend compte immédiatement que la théorie des séries entières a beaucoup guidé les recherches. La convergence d'une série entière n'a lieu que dans un cercle, c'est-à-dire dans une région du champ complexe située *du même côté* d'une circonférence ; la convergence d'une série de Dirichlet a lieu *du même côté* d'une droite d'où la notion du *demi-plan* de convergence. Nombre de théorèmes sur l'allure singulière d'une fonction analytique dans le voisinage du cercle de convergence se retrouvent ici dans le voisinage de la droite de convergence ; les résultats tayloriens de MM. Hadamard, Borel, Fabry, Mittag-Leffler,... en reçoivent comme un lustre complémentaire. Il en est de même des théorèmes d'Abel.

Les choses deviennent plus intéressantes encore avec les procédés d'extension analytique. On peut imaginer des déterminations des λ_n pour lesquelles certaines méthodes de prolongement analytique, nées à propos de séries entières, s'appliquent encore mieux aux séries de Dirichlet. Des méthodes de sommabilité déplacent avantageusement la droite de convergence, d'autres la font disparaître et permettent de prolonger la série en s, dans tout le champ complexe, en une étoile d'holomorphie qui a, en ce cas, ses rayons parallèles mais n'en correspond pas moins à l'étoile plus véritablement étoilée de M. Mittag-Leffler.

H. Bohr a relié l'existence même des séries de Dirichlet à des constructions arithmétiques diophantiques d'où il passe à de très originales considérations sur les fonctions quasi-périodiques. H. Weyl, si connu pour ses travaux parallèles à ceux d'Einstein, a également travaillé à cette partie d'une théorie qui, dominant à la fois la fonction à variable complexe et la fonction à variable réelle, présente une généralité propre à tenter l'esprit d'application dans ses manifestations les plus diverses. Il me semble, du moins, que M. Valiron nous a montré tout cela d'une manière fort remarquable.

A. Buhl (Toulouse).

T. Carleman. — **Les fonctions quasi-analytiques.** Leçons professées au Collège de France (Collection E. Borel). Un volume gr. in-8° de 116 pages. Prix : 30 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

La théorie des fonctions quasi-analytiques a, dans le passé, des racines plus diverses qu'on ne le croit généralement. On en trouve un premier germe dans la Thèse de M. Emile Borel publiée il y a une trentaine d'années ; elle se rattache aux séries asymptotiques étudiées par Henri Poincaré dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (T. 1, chap. VII) et cela a déjà donné lieu à une fort remarquable exposition d'ensemble de M. Borel en ses *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe* analysées d'ailleurs en cette Revue (T. 20, 1918, p. 143). Le nouveau volume nous met au courant des progrès réalisés depuis la rédaction de ces dernières *Leçons*.

Le sujet, au fond, semble avoir ses assises dans les immenses progrès faits par la notion d'intégration, progrès qui, de par la nature même des choses, ne pouvaient avoir leur pendant du côté de la notion de dérivation. Dès lors le point de vue de Cauchy, à caractère intégral, était manifestement généralisable ; le point de vue de Weierstrass, à caractère differentiel, ne l'était pas autant. Ceci ne signifie pas, en effet, que du côté de la fonction quasi-analytique nous ne trouverons rien qui ressemble à un développement en série entière mais il y faudra le secours des méthodes boréliennes de prolongement, des fractions continues de Stieltjes et, tout particulièrement, des séries asymptotiques de Poincaré.

Il y a évidemment lieu de se demander si l'extension quasi-analytique ne repose pas sur des opérations d'une transcendance inexécutable ou bien si le quasi-analytique contient vraiment autre chose que l'analytique ; or les réponses à ces questions sont maintenant des plus simples et des plus explicites. Des séries de fractions rationnelles du plus élégant aspect, des séries trigonométriques représentent très naturellement des fonctions quasi-analytiques. D'ailleurs des séries de fractions rationnelles on peut passer aux séries de fonctions uniformes ; de telles suites peuvent admettre des fonctions limites d'une quasi-analyticité irréductible à l'analyticité.

N'épiloguons pas davantage sur ce livre, à la fois bel et bref, qu'on ne jugera bien que par une étude directe. Il parait très complet au point de vue bibliographique. Il renseigne sur de très nombreuses notes publiées, dans ces dernières années, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, par MM. Borel, Denjoy, Holmgren, La Vallée-Poussin, Montel, Nevanlinna, Riesz,... et par M. Carleman lui-même.

C'est de la science très rigoureuse, très esthétique et, ne craignons pas de le dire, très objective. Des comparaisons extrêmement intéressantes seraient à faire avec les *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des Fonctions analytiques d'une variable réelle* de M. S. Bernstein, leçons analysées dans notre dernier fascicule (ce tome, p. 141). Ainsi, d'une part, la variable complexe semble perdre du terrain, mais elle a créé l'analytique qui se révèle fécond en généralisations ; l'idée de perte n'a donc aucune raison d'être, les progrès des théories en litige n'apportant partout que gains et perfectionnements.

A. Buhl (Toulouse).

E. Borel. — **Calcul des Probabilités. Applications à l'Arithmétique et à la Théorie des Fonctions.** — Tome II, fascicule I du *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* publié par M. Emile Borel avec la collaboration de L. Blaringhem, C.-V.-L. Charlier, R. Deltheil, P. Dubreil, M. Fréchet, H. Galbrun, J. Haag, R. Lagrange, F. Perrin, P. Traynard. — Un vol. gr. in-8° de 104 pages. Prix : 17 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Brillant et intéressant fascicule rédigé, d'après les leçons de M. Emile Borel, par M. Paul Dubreil, élève de l'Ecole normale supérieure. Il débute par une application de la loi des écarts à l'étude des nombres décimaux ; il s'agit de la distribution des chiffres dans ces nombres, distribution certaine tant qu'elle résulte d'un calcul précis et qui pourrait continuer à être certaine si le calcul était continué, mais qui, dans le cas contraire, n'est plus que probable, la probabilité correspondant ici non à un manque de détermination, mais à l'ignorance où nous sommes de celle-ci. Il y a une correspondance remarquable entre les nombres à distribution improbable et les ensembles de mesure nulle et l'on ne peut juger complètement du caractère probable ou improbable d'une distribution sans considérations sur le système de numération employé. Et voilà déjà l'arithmétique, les ensembles et les probabilités curieusement agglomérés.

Les probabilités dénombrables interviennent rapidement ; on peut rechercher, dans une suite illimitée de décimales, des arrangements finis et ce au moyen d'une infinité dénombrable d'épreuves ; ou bien des arrangements dénombrables au moyen d'épreuves en nombre fini ; ou bien encore des arrangements dénombrables au moyen d'épreuves en infinité dénombrable. Le système binaire offre des exemples simples dans ces trois ordres d'idées et l'on peut ensuite passer aisément au cas du système décimal. De nouveaux ensembles de mesure nulle naissent ici de manière fort naturelle. Le nombre susceptible d'éveiller l'attention fait généralement partie de tels ensembles et cependant son existence arithmétique ne fait aucun doute. On pourrait même, si on le désirait, retourner la thèse et recréer la notion de mesure nulle sur la théorie de faits, arithmétiques ou autres, à probabilité nulle, quoique à existence possible et même certaine puisqu'il y a des choses certainement possibles qui n'arrivent jamais. Peut-être ici devrais-je m'excuser de dépasser la pensée de M. Borel, lequel se tient strictement sur le terrain mathématique, mais il ne peut déplaire à l'éminent auteur qu'on trouve l'occasion de paraphraser son exposé. Même arithmétisé, le Calcul des Probabilités est encore, par excellence, une science d'applications qui se peuvent apercevoir sous les formes les plus diverses.

Les fractions continues interviennent ensuite et c'est encore tout ce qu'il y a de plus naturel puisqu'il s'agit d'un mode de représentation arithmétique peu différent en somme du mode numérique ordinaire. Les quotients incomplets des fractions en question ont des modes de croissance avec des probabilités pour que cette croissance soit plus ou moins rapide que celle de fonctions données. On peut passer de là à des comparaisons probabilitaires entre croissances fort quelconques et atteindre aussi un paradoxe de Zermelo sur les mesures de certains ensembles géométriques, mesures qui ne semblent pas coïncider suivant le tour adopté pour le raisonnement. Le paradoxe n'est qu'apparent. Comme l'a fait remarquer, une fois de plus, M. Zaremba (voir l'analyse du fascicule XV du « Mémorial ») on confond alors certaines notions avec d'autres plus générales.

Tout ceci doit suffire à laisser transparaître toutes les richesses des aperçus de M. Borel. Les chiffres souvent invoqués pour leur précision peuvent aussi évoquer l'idée d'une vie ondoyante et aléatoire.

Le volume se termine par quatre Notes complétant certains exposés du corps de l'ouvrage. Ici je ne retiendrai que la première qui explique brièvement les termes et les lemmes fondamentaux de la théorie des ensembles. Ainsi l'amateur de probabilités n'aura rien à chercher hors de ces pages si originales et captivantes.

A. Buhl (Toulouse).

J. Haag. — **Calcul des Probabilités. Applications au tir.** — Tome IV, fascicule I du *Traité* mentionné à l'article précédent. Un vol. gr. in-8° de VI-184 pages, 19 figures, 8 tableaux numériques et 10 diagrammes. Prix : 30 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Les officiers d'artillerie ont naturellement une formation mathématique ; la dernière guerre a fait naître la réciproque et des théoriciens des mathématiques sont devenus artilleurs, la contribution ainsi apportée à la balistique étant aussi notable qu'intéressante. Le volume de M. Haag paraît être né dans ces circonstances ; nous y trouvons aussi des noms d'analystes très purs, tels celui de M. René Garnier. Quant à M. Paul Lévy, c'est à la fois l'analyste et le probabiliste par excellence.

Le problème du tir rappelle les probabilités géométriques et bien des pages du présent volume se rattacheraient facilement à celui de M. Deltheil récemment analysé ici (ce tome, p. 135). De plus la loi de Gauss triomphe en balistique et M. Haag entreprend justement de la justifier aussi minutieusement qu'il est possible par l'étude théorique de la dispersion à partir des causes de celle-ci. Il introduit très élégamment des probabilités vectorielles menant elle-même, très intuitivement, aux ellipses de probabilité. Le tir *percutant* devant atteindre des points généralement situés dans une région plane (sol, cible) de contour donné, le tir *fusant* devant généralement provoquer des éclatements dans l'espace, nous sommes ici, très exactement, dans le domaine de la probabilité continue et l'on passe du premier cas au second comme l'on passe d'un problème à deux variables à un problème à trois, l'essence même des formules n'étant pas altérée.

Dans les tirs balistiques et la confection des tables de tir, l'auteur discute longuement l'influence du nombre de coups tirés. La question est fort délicate. Théoriquement on est porté à penser que plus les coups seront nombreux, plus les moyennes de toute nature seront satisfaisantes mais, en fait, on ne peut prolonger l'expérience à volonté ; la pièce s'échauffe, les circonstances atmosphériques varient, etc. Il faut donc ici, avec un nombre d'épreuves souvent très limité atteindre, du moins autant que possible, des résultats pour lesquels les méthodes probabilitaires ordinaires demanderaient un très grand nombre de ces mêmes épreuves. D'où une grande variété de méthodes auxquelles s'attachent généralement les noms d'officiers spécialisés en la matière.

Le tir à la cible obéit généralement à une loi de Gauss isotrope ; les ellipses de probabilité sont des cercles. Il y a là d'ingénieux usages de gabarits, également circulaires, pour apprécier la précision du tir et le nombre de points à attribuer au tireur.

Le réglage du tir admet une sorte de théorie empirique qui suppose une *hausse d'essai* et une *hausse de but*, différant de moins d'une *fourchette* ; autrement le but n'est pas *encadré*. La théorie mathématique pure est un problème de probabilité des causes intéressant quant au recours à la formule de Bayes mais d'un secours discutable en pratique.

Là encore un tir prolongé est loin d'être l'idéal ; il faut savoir profiter d'un petit nombre d'encadrements. On peut régler un tir sur les points d'une droite de référence puis sur un but intersection de deux telles droites ; particulièrement simple est le cas où celles-ci sont les diamètres conjugués d'une ellipse de probabilité.

A l'*efficacité* correspond la notion précise de *densité* du tir en un point du but à atteindre. Toujours de même, il est bien évident que cette densité augmente avec la consommation, mais une opération tactique n'admet ni un temps infini, ni un nombre illimité de projectiles ; il faut donc demander à la théorie une densité maximum pour une consommation donnée.

Un dernier chapitre sur le tir de chasse nous ramène à la loi de Gauss et la met spécialement en valeur, le tir à plombs réalisant des effets moyens beaucoup plus certains que le tir à balle.

Quatre notes particulièrement mathématiques terminent le volume. La dernière comprend les tableaux et diagrammes ci-dessus mentionnés. Le caractère systématique de l'œuvre est manifeste et il permet la condensation de développements techniques présentés de manière beaucoup plus encombrante dans de gros traités de balistique. La géométrie probabilitaire est ici traitée sur le terrain sans rien perdre de son élégance théorique.

A. BUHL (Toulouse).

Th. LECONTE et R. DELTHEIL. — **Eléments de Calcul différentiel et de Calcul intégral.** — Deux volumes in-16 de chacun 220 pages, avec 69 et 75 figures (Collection Armand Colin). Prix du volume : broché, 7 fr. ; relié, 8 fr. 50. Armand Colin, Paris, 1926.

Cet ouvrage peut représenter la partie la plus analytique d'un cours de Mathématiques générales savant et profond quoique fort intuitif. On peut se demander si le Traité de Mathématiques générales présenté complet, sous forme d'un ou plusieurs gros volumes (il y en a de tels), est véritablement l'idéal. Il y a tant de choses à enseigner sous la rubrique en question : Analyse, Géométrie analytique, Géométrie cinématique, Calcul vectoriel, Calculs numériques, sans parler de la Mécanique proprement dite. Ne vaudrait-il pas mieux recourir à des ouvrages de même esprit mais se divisant sur les spécialités indiquées ? Ne cherchons pas à trancher ce point d'une manière définitive ; remarquons seulement que la collection Armand Colin rend cette conception possible et attrayante avec des auteurs comme MM. Tresse, Bricard, Béghin, Gau et enfin MM. Leconte et Deltheil.

Nous sommes ici en présence d'une science très courante ; il est difficile de l'analyser sous des couleurs originales et cependant les auteurs ont eu bien des idées dignes d'être soulignées. La représentation graphique quoique peu rigoureuse (p. 13) est ici essentielle. Certes, le continu graphique est loin de contenir toute la logique de la continuité mais, accepté tel quel, il est indéniablement objet de science. Et l'acceptation de cette idée ne va pas sans l'indication d'intéressantes singularités qui laissent déjà soupçonner toute la complexité de la notion en litige.

Passons rapidement sur les fonctions élémentaires rationnelles ou trigonométriques, sur la notion de dérivée non toutefois sans remarquer la genèse de la notion d'équation différentielle (p. 59). On passe ensuite aux différentielles, sujet délicat au delà du premier ordre mais justement éclairé par des changements de variable en des équations différentielles. Indiquons de nombreuses variations de fonctions, les formules de Mac-Laurin et de Taylor, les fonctions de deux variables correspondant à la conception de surface.

Le calcul intégral commence avec la notion d'aire. Lx est défini par sa dérivée et comme L (ax) et Lx ont même dérivée on a

$$\mathrm{L}\,(ax) - \mathrm{L}\,(x) = \text{const.} = \mathrm{L}a\ .$$

Ce raisonnement fait l'effet d'un bijou d'une extrême simplicité et du meilleur goût. Viennent alors les fonctions exponentielles et leurs combinaisons en forme de fonctions hyperboliques. La recherche des fonctions primitives est traitée avec un grand luxe d'exemples indiquant les cas originaux qu'il y a intérêt à séparer des méthodes générales. La théorie des séries numériques bénéficie du Calcul intégral par l'usage de critères de convergence intégraux (p. 171) et la règle de multiplication des séries se lit en évidence sur un tableau approprié d'une symétrie d'ailleurs très simple (p. 180).

Avec les séries de fonctions nous rencontrons d'abord la convergence « normale » de M. Baire. Ce concept donne immédiatement des théorèmes d'intégration et de dérivation naturellement applicables aux séries entières. Le tome I se termine alors par les séries trigonométriques et les intéressants graphiques discontinus qu'elles peuvent représenter.

Le tome II débute avec les extensions de la notion d'intégrale. Les intégrales dont l'élément devient infini sont rattachées à d'importantes questions de mécanique ; le pendule simple en donne de telles et le théorème des forces vives peut en faire naître à volonté. Le cas d'une limite infinie comprend notamment les intégrales de Fresnel dont le sens est établi par le tracé de la courbe $y = \sin x^2$. Les fonctions représentées par une intégrale définie sont immédiatement illustrées par la fonction Θ c'est-à-dire par la loi de Gauss du Calcul des probabilités. Les intégrales elliptiques sont mentionnées avec l'indication de plusieurs cas de pseudo-ellipticité. La fonction $G(\lambda)$ est définie par l'intégration de $f(x, \lambda)\, dx$ entre des limites a et b constantes ou fonctions de λ. Ceci conduit à la dérivation par rapport à λ.

Dans l'étude des intégrales de différentielles totales exactes les notions de point critique et de période sont intuitivement discutées, la formule de Green-Riemann montrant immédiatement le rôle du point critique enfermé dans le contour d'intégration. Le sujet conduit naturellement à des éléments d'analyse vectorielle, à une condensation de la formule de Green ainsi qu'à une forme analogue pour celle de Stokes.

Viennent les aires planes richement illustrées, les volumes qui ne le sont pas moins surtout par d'ingénieuses applications de la formule des trois niveaux. Les théorèmes de Guldin sont amplement mis à profit ici pour les volumes, plus loin pour les aires de révolution, ceci sans préjudice de développements propres aux aires gauches quelconques.

Nous passons aux équations différentielles. Les solutions singulières et l'intégration par séries interviennent immédiatement. Quant aux types simples d'équations intégrables, des exemples admirablement choisis, géométriques et physiques, font comprendre l'intime structure de leur simplicité et toute la portée de celle-ci. Signalons, en particulier, les lignes *isoclines* attachées à toute équation du premier ordre et particulièrement à l'équation de Lagrange (équation à isoclines rectilignes). Cette impression se conserve quand on passe du premier ordre au second et c'est ainsi que sont élégamment abordées les courbes de Ribaucour, la courbe du chien les équations intrinsèques des courbes planes. Les équations linéaires sont traitées avec tout le détail des singularités d'intégration à théorie élémentaire. Les systèmes différentiels conduisent aux équations aux dérivées partielles linéaires jusques et y compris celle des cordes vibrantes.

L'ouvrage se termine par une théorie rapide des quantités complexes, des séries et des fonctions à variable complexe. Des calculs faits antérieurement avec la variable réelle sont ici repris et abrégés.

Souhaitons que les auteurs de ces deux volumes continuent une aussi brillante exposition ; quoiqu'il en soit, la méthode et les si nombreux exercices proposés en cours de route donneront, à qui les étudiera, l'élan nécessaire et suffisant à la conquête des sommets de l'analyse.

A. Buhl (Toulouse).

G. Bouligand et G. Rabaté. — **Initiation aux Méthodes vectorielles et aux applications géométriques de l'Analyse.** — Un volume in-8° de VIII-216 pages avec nombreuses figures. Prix : 20 francs. Vuibert, Paris, 1926.

Cet ouvrage est un magnifique fragment d'un savant cours de Mathématiques générales. Ce que nous disons d'autre part au sujet du Calcul infinitésimal de MM. Leconte et Deltheil est aussi bien de mise maintenant. Seulement, ici, il s'agit beaucoup plus spécialement du Calcul vectoriel considéré comme pouvant donner naissance à de vastes théories analytiques.

Les auteurs comparent la méthode vectorielle et la méthode cartésienne non pour conclure exclusivement en faveur de la première, mais pour bien marquer leurs avantages et leurs inconvénients respectifs. D'ailleurs, nous n'avons qu'à rappeler que M. Bouligand a écrit un *Cours de Géométrie analytique* (Cf. *L'Ens. math.*, T. 20, 1918, p. 390) et des *Leçons de Géométrie vectorielle préliminaires à l'étude de la Théorie d'Einstein* (Ibid., T. 23, 1923, p. 333) ; comment alors n'être pas convaincu que l'éminent professeur de l'Université de Poitiers sait aussi bien, suivant les circonstances, être cartésien ou vectorialiste. Et il est bien évident que son collaborateur, M. G. Rabaté, ne peut penser autrement.

Le livre débute tout naturellement par les produits scalaire et vectoriel, les volumes, les déterminants. Ceci constitue déjà les fondements de la Physique mathématique la plus moderne et la plus savante et il n'est pas absolument aisé de saisir le pourquoi de la chose ; contentons-nous d'abord de la simple exposition des fondements en question. La théorie des moments, qui vient ensuite, n'a déjà plus d'originalité absolument essentielle : sa symétrie est une symétrie de déterminants. La dérivation géométrique nous donne une brève théorie des courbes planes ou gauches conduite jusqu'aux formules de Frenet.

L'étude des fonctions de points conduit aux surfaces de niveau et au *gradient* normal à celles-ci. Ce gradient intervient aussi très naturellement dans des constructions de tangentes ou de normales aux coniques, aux ovales de Cassini, etc.

Le chapitre qui traite des Problèmes d'intégration au point de vue géométrique a une valeur synthétique considérable. La masse, la densité, la valeur moyenne d'une fonction de point, dans un domaine continu, imposent la notion d'intégrale. Cette notion est alors mise à profit dans les formules intégrales fondamentales du Calcul vectoriel (Green, Stokes).

Un champ de vecteurs, en géométrie plane, impose aussi, par la recherche des lignes tangentes aux vecteurs du champ, la notion d'équation différentielle développée sur les types les plus simples. A noter le concept des lignes *isoclines* qui, lorsqu'elles sont des droites, font de l'équation de Lagrange un type de considération primordiale. Parmi les intégrations les plus élégantes, citons celle qui conduit aux épicycloïdes et se trouve d'accord avec une remarque fondamentale due à M. H. Lebesgue et concernant ces courbes.

Dans l'espace, les champs de vecteurs conduisent aux équations différentielles simultanées et aux équations aux dérivées partielles. Les congruences qui admettent des trajectoires orthogonales mènent aux équations aux différentielles totales.

La théorie des surfaces est traitée dans le même esprit ; des notions sur les transformations linéaires y sont incluses pour pouvoir parler des directions principales d'une telle transformation. Ensuite on arrive sans peine aux directions principales superficielles, aux théorèmes de Meusnier, d'Euler, d'Ossian Bonnet, de Joachimsthal et de Dupin. Suivent 67 exercices de récapitulation, tous élégants et remarquables, puis deux Notes *Sur le centre instantané de rotation* et *Sur une conception générale du Calcul et sur les nombres complexes*. Dans cette dernière, M. Bouligand revient encore sur les rôles réciproques de l'Analyse et de la Géométrie en développant cette idée que l'Analyse tout en paraissant prendre le premier plan au point de vue logique ne cesse cependant point d'être fécondée par des vues géométriques appropriées. En somme, tout le livre ne fait que justifier cette idée essentielle et féconde. A. Buhl (Toulouse).

L. Schlesinger und A. Plessner. — **Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen.** — 1 vol. gr. in 8°, VIII et 229 p.; broché, 14 M.; Walter de Gruyter & Co, Berlin und Leipzig, 1926.

La théorie de l'intégration de M. Lebesgue a fait depuis 1902 l'objet d'un nombre considérable de travaux. Dans des mémoires originaux, la belle conception de M. Lebesgue a reçu des développements inattendus; on a cherché d'autre part, dans des ouvrages didactiques et des monographies, à mettre l'instrument analytique nouveau à la portée des étudiants de nos Universités. Le livre de MM. Schlesinger et Plessner n'est donc pas le premier qu'on ait écrit sur le sujet, mais l'importance de la théorie de l'intégration de M. Lebesgue est si grande, les progrès réalisés grâce à elle si considérables, que toute tentation nouvelle de grouper les principaux résultats acquis est appelée à rendre des services réels. MM. Schlesinger et Plessner ne supposent chez le lecteur aucune préparation spéciale. Ils s'adressent tout particulièrement aux jeunes. Aussi leur livre débute-t-il par une étude préliminaire assez longue, mais fort intéressante, consacrée d'une part à la théorie classique des ensembles et en particulier à celle de la mesure au sens de Borel et Lebesgue, et d'autre part à quelques points de la théorie des fonctions de variables réelles.

On sait que la théorie de l'intégration de M. Lebesgue peut être exposée de bien des manières. MM. Schlesinger et Plessner ont choisi la plus ancienne, celle qui a été adoptée par M. Lebesgue lui-même dans sa thèse « Intégrale, longueur, aire » et qui présente certainement des avantages, mais ils font connaître en même temps des définitions plus récentes de MM. Lebesgue, W. H. Young, Riess, tout en laissant de côté des généralisations plus larges, comme celle de M. Denjoy, s'écartant davantage de la conception de M. Lebesgue. Les auteurs envisagent tout de suite le cas général d'un espace à un nombre quelconque de dimensions et ce n'est que dans le chapitre suivant qu'ils passent à l'étude des fonctions d'une ou de deux variables. N'eût il pas été préférable, au point de vue didactique, d'adopter l'ordre inverse ?

Le livre se termine par une application des notions nouvelles à l'étude des séries de Fourier. On y trouve, à côté des propriétés classiques que l'on doit à Riemann et Dirichlet, les points essentiels des résultats récents obtenus sous l'influence des travaux de M. Lebesgue. C'est là une introduction des plus intéressantes à la théorie des séries de Fourier qui continue encore à attirer tout particulièrement l'attention des géomètres d'aujourd'hui. Un index alphabétique et des indications bibliographiques précieuses complètent ce volume, qui rendra certainement de réels services aux jeunes mathématiciens en leur donnant un exposé simple et clair d'une théorie dont l'intérêt est capital.

D. Mirimanoff (Genève).

Ph. Le Corbeiller. — **Contribution à l'étude des Formes quadratiques à indéterminées conjuguées.** Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. — Un fascicule gr. in-4° de 180 pages. Ed. Privat, Toulouse, 1926. En vente chez J. Hermann, Paris. Prix: 30 francs,

Voici véritablement une grande Thèse Cette appréciation ne vient pas seulement du décompte du nombre de pages. L'ampleur matérielle provient de celle des conceptions.

La tournure actuelle de la Physique mathématique donne une grande importance aux formes *différentielles* quadratiques. Et cependant les formes quadratiques algébriques ont un passé plein de gloire suffisamment défendu par les noms de Cayley, Hermite, Sylvester, Klein, Humbert, Picard... Au fond il s'agit d'une étude de l'espace cayleyen où se révèlent des richesses géométriques et arithmétiques telles que, pour peu qu'on prenne la peine de les étudier, on reste confondu de la pauvreté et de l'insignifiance de l'espace euclidien. L'étude est condensable et condensée par un ingénieux symbolisme, né surtout avec Hermite et Humbert, et auquel M. Le Corbeiller a apporté de belles contributions. Quand on étudie Cayley lui-même, dans les volumes énormes et cependant de très grand format des *Mathematical Papers*, on est souvent gêné par des formules de substitution, des déterminants, ... qui, n'ayant pu s'accommoder de la largeur de la page, sont inesthétiquement coupés. Or ceci n'est pas obligatoirement dans la nature des choses; il y avait à trouver des notations de condensation. Les variables conjuguées d'Hermite, représentées par une seule lettre, apportent d'abord la brièveté. De plus, dans l'espace cayleyen, il existe, pour les différents types de formes, une représentation par points, droites, plans, etc., bref par variétés simples qui sont notamment propres à diviser l'espace, à deux ou trois dimensions, en régions se correspondant de par l'automorphisme des fonctions fuchsiennes, kleinéennes de Poincaré ou de par des extensions de celles-ci dues à M. Picard. On voit l'immense champ de recherches qui, au fond, est bâti sur quoi ? Simplement sur les concepts de forme quadratique, de transformations homographiques y associées, de rapports anharmoniques et d'absolus conservés, ce qui conduit aux déplacements cayleyens, plus variés, plus symétriques que ceux de l'espace euclidien mais cependant rattachables à des généralisations de la notion de déplacement hélicoïdal.

M Le Corbeiller a tenu à faciliter l'étude de son beau travail. La partie géométrique est précédée d'une Introduction qui en indique les grandes lignes; vient ensuite la partie arithmétique qui est traitée de même.

La Géométrie nous réserve ici des résultats inattendus. On pourait croire, par exemple, que les formules de distances cayleyennes entre point et plan, point et droite, droite et droite, étaient choses fixées; or, il n'en est rien ou du moins nous trouvons ici des formes nouvelles, et toujours remarquablement condensées, pour l'expression de telles distances.

L'Arithmétique est surtout un monument magnifique à la mémoire de Georges Humbert, mort, pour ainsi dire, en scrutant les formes à indéterminées conjuguées. Le groupe modulaire y joue naturellement un rôle considérable et mène encore à de très simples formules trigonométriques pour la théorie des équations de Pell dans le domaine complexe. Une simple équation du second degré donne les composantes géométriques d'un déplacement de l'espace cayleyen en fonction des coefficients de la substitution modulaire correspondante; et cette formule, d'origine géométrique, se trouve être riche de conséquences arithmétiques.

Certaines configurations polyédriques sur les arêtes desquelles on cherche à énumérer des formes, ne se prêtent pas à cette recherche pour une arête quelconque ni même pour un cycle d'arêtes, mais il y a des *familles de cycles* d'arêtes pour lesquels la question se résout. Et une symétrie et une possibilité arithmétiques apparaissent là où l'espace cayleyen permet de discerner une famille de cycles.

La thèse se termine par des monographies, des images de configuration, des tableaux numériques généralement clairs comme de courtes formules.

Georges Humbert eût été heureux d'assister à une telle moisson d'idées et nous avons une raison de plus de déplorer sa disparition si brusque et si prématurée.

A. Buhl (Toulouse).

G. Juvet. — **Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur une généralisation du théorème de Jacobi.** Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. — Un fascicule gr. in-4° de IV-56 pages. Prix: 22 francs. Albert Blanchard, Paris, 1926.

M. G. Juvet est bien connu, dans le monde de la Physique mathématique, pour ses livres d'initiation concernant les théories relativistes et quantistes, le dernier en date de ces ouvrages venant d'ailleurs d'être analysé ici même (ce tome, p. 144).

Voici une Thèse, qui fait de l'auteur un fort jeune docteur, laquelle est naturellement tenue d'être plus originale que les publications précédentes mais qui, au fond, s'inspire des mêmes sujets en leur apportant les plus intéressants compléments et en les liant au Calcul fonctionnel lequel, jusqu'ici, n'a pas énormément voisiné avec l'analyse einsteinienne. M. Juvet nous confie d'ailleurs, dans son Introduction, qu'il a entrepris ses recherches à propos des intégrales d'action de la Relativité et avec le dessein d'en tirer une méthode d'intégration des équations d'Einstein et des équations de Maxwell généralisées.

On sait que le théorème de Jacobi, sur l'intégration des équations canoniques, est dans un rapport immédiat avec le Calcul des variations relatif aux intégrales simples. On peut se proposer de rechercher une correspondance analogue dans le cas des intégrales multiples mais il s'agit alors d'une de ces généralisations qui n'ont pas toujours un caractère intuitif et immédiat; l'équation aux dérivées partielles de Jacobi-Hamilton doit être remplacée par une équation aux dérivées *fonctionnelles* partielles. A celle-ci s'associent des équations lagrangiennes ou hamiltoniennes qu'on peut précisément qualifier ainsi parce que leur construction ne dépend que de la connaissance d'une seule fonction. Ces équations sont moins symétriques que leur prototype élémentaire mais l'auteur n'en a eu que plus de mérite à les former explicitement. D'ailleurs il y a ici une complexité spéciale qui tient au nombre de dimensions de l'hyperespace et au fait qu'il n'est pas généralement possible de construire, en celui-ci, des systèmes multiplement orthogonaux à l'image des systèmes triples de l'espace ordinaire.

Les intégrales multiples en litige étant des fonctionnelles devant satisfaire à une équation aux dérivées fonctionnelles, nous devons rechercher les conditions d'intégrabilité pour de telles équations, ce qui donne lieu à un laborieux chapitre mais repose au fond sur une idée simple, celle de l'interversion de deux variations δ et δ_1. Les conditions d'intégrabilité les plus élémentaires, en Analyse ordinaire, reposent sur de telles interversions et il est fort remarquable que la méthode s'étende au domaine fonctionnel.

Toujours pour la même équation aux dérivées fonctionnelles, on peut encore arriver à des extensions des notions de caractéristiques et d'intégrale complète; le langage de Cauchy se laisse alors transporter sans modifications essentielles. Et quand M. Juvet veut conclure par son extension définitive du théorème de Jacobi, il peut avoir la coquetterie de rappeler les 19^{me} et 20^{me} leçons des *Vorlesungen über Dynamik* qu'il a respectées sinon absolument à la lettre du moins quant aux grandes lignes. Il y a aussi des extensions possibles de la méthode de Lagrange et Charpit, du théorème de Stäckel, etc.

Il n'est pas étonnant que cette Thèse d'un savant suisse ait été dédiée à M. Vessiot et qu'elle ait été soutenue à Paris sous la présidence de M. Cartan. Si elle n'oublie ni Volterra, ni Prange elle est cependant plus encore un hommage à des travaux français ou d'esprit français, tels ceux de MM. Th. De Donder, M. Fréchet et P. Lévy.

A. Buhl (Toulouse).

H. Eyraud. — **Les équations de la Dynamique de l'Ether** avec une **Note sur la Technique du repérage de l'Espace et du Temps dans ses rapports avec la Relativité.** Un fascicule gr. in-8° de 68 pages. Prix: 12 francs. Albert Blanchard, Paris, 1926.

Disons tout de suite que cette œuvre aborde l'une des questions les plus curieuses qui se puissent rattacher aux espaces relativistiques. En analysant (ce tome, p. 140) le récent ouvrage einsteinien de MM. Appell et Thiry nous insistions sur la discussion de la notion de *torsion*, introduite dans les espaces généraux par M. Elie Cartan, et, mot à mot, nous écrivions: « Reste à savoir si l'avenir nous révélera des phénomènes physiques interprétables dans des espaces tordus ? » Eh bien, la réponse n'a pas tardé et M. Eyraud l'apporte ici en essayant tout au moins, grâce à la nouvelle notion, de perfectionner l'électromagnétisme maxwellien.

La torsion s'introduit d'ailleurs de la manière la plus naturelle dans la géometrie des espaces affines; elle a d'abord été évitée par une hypothèse de symétrie analytique qui n'a aucune raison essentielle d'existence. On peut en tenir compte en laissant aux formules toute leur élégance. M. Eyraud étudie notamment le cas où un espace tordu peut correspondre isométriquement à un espace sans torsion.

Les formules stokiennes générales, ou formules de Stokes-Poincaré, conduisent immédiatement à la conception en litige, plus simple que celle de courbure, devant précéder cette dernière et s'attacher plus particulièrement aux phénomènes électromagnétiques, la courbure continuant à s'attacher aux phénomènes gravitationnels. Et ceci est encore tout naturellement d'accord avec l'ordre de développement adopté par M. Cartan dans son grand Mémoire *Sur les Variétés à Connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* (Annales de l'Ecole Normale, 1923-1925).

Il y aurait aussi beaucoup à dire sur le titre choisi qui semble indiquer que l'auteur croit à l'Ether. Le mot sera d'ailleurs difficilement abandonné par les physiciens. Ici, il n'existe, pour ainsi dire, que par commodité; si l'on ne veut pas que ce soit l'espace de Riemann lui-même, à cause du caractère fugitif, insaisissable que certains prêtent à un espace qui leur semble dépourvu de figure sensible, ce sera une variété à laquelle on attribuera quelque nature physique pourvu qu'elle soit applicable projectivement et conformément sur l'espace riemannien.

Le mathématicien dira qu'il ne voit pas la nécessité de ce détour mais le physicien sera peut-être satisfait. Convenons aussi que des équations dynamiques, obtenues par le principe hamiltonien, peuvent conserver le sens que leur donne la Mécanique classique et ne révéler qu'après coup une théorie rattachable à la seule géométrie.

Nous sommes donc, une fois de plus, en présence d'une théorie qui géométrise l'Ether sans le nier. Elle est d'ailleurs particulièrement attrayante et M. Eyraud n'a que d'esthétiques formules. Elle est *partiellement* valable dans l'atome; elle fait donc aussi partie des synthèses, en pleine élaboration à l'heure actuelle, qui tentent de lier la Gravifique einsteinienne aux Quanta.

Des idées également ingénieuses sont esquissées dans la Note terminale. Ainsi il ne serait pas impossible d'observer ou plutôt de croire observer une vitesse supérieure à celle de la lumière, mais la chose s'expliquerait par un effet analogue à celui d'une trompeuse perspective. En résumé, beaucoup d'idées.

A. BUHL (Toulouse).

M. KRAITCHIK. — **Théorie des Nombres.** T. II. Analyse indéterminée du second degré et factorisation. — Un volume gr. in-8° de IV-252 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Ce nouveau volume fait évidemment suite à des travaux antérieurs de M. Kraitchik, travaux dont l'esprit a déjà été fort bien mis en relief par M. Du Pasquier, en une analyse précédemment publiée (*L'Ens. math.*, T. 23, 1923, p. 340). La Théorie des Nombres s'est accommodée de variables continues et, comme nous avons eu l'occasion de le redire, à propos de la récente Thèse de M. Le Corbeiller, ses formes quadratiques ont pu être illustrées, avec beaucoup d'art, par la géométrie cayleyenne. Toutefois, le point de vue arithnomique demeure et c'est surtout celui de M. Kraitchik qui l'expose dans un enchaînement d'idées extrêmement remarquable.

Le volume débute par les « Equations indéterminées du second degré à deux inconnues ». L'étude préliminaire des fractions continues s'impose d'abord avec l'élégant théorème de Lagrange qui veut qu'une racine d'équation trinome soit développable, en fraction continue périodique. Quant à l'équation générale du second degré, on peut toujours y voir une conique de laquelle on cherche des points à coordonnées entières. Les réductions géométriques élémentaires jouent d'abord; il y a ensuite des réductions arithmétiques puis, le cas hyperbolique prenant l'importance principale, il reste des types dont la résolution définitive dépend du développement en fraction continue d'équations trinomes à une seule variable. Dans ces dernières équations, on trouve, en particulier, le cas binome

$x^2 = A$ qui, à lui seul, donne un bien joli chapitre. Le développement, en fraction continue, de la racine carrée de 2 était connu d'Euclide; le résultat se conserve pour la racine de a^2+1 et peut d'ailleurs subir quelques transformations, d'où un tableau des $A<1000$ dont la racine admet un développement analogue au développement euclidien. Ceci fait, l'auteur décompose des racines de A en fractions dont les périodes contiennent un nombre donné de termes et va ainsi jusqu'à 25 termes en des tableaux qu'on ne se lasse point d'admirer. Il y a ici une double habileté, celle du calculateur et celle du savant qui domine de haut son sujet et profite du fait de se trouver encore dans une partie relativement élémentaire de la Théorie des Nombres pour en montrer aisément les richesses.

On peut ensuite passer au cas de $x^2+x=A$ et dans le même ordre d'idées. On se trouve alors armé pour faire une première théorie des équations de Pell dont les solutions correspondent à des réduites des fractions continues précédentes.

L'Arithmétique des formes quadratiques constitue la seconde partie du volume. Il s'agit surtout ici du comportement de ces formes vis-à-vis de substitutions linéaires. D'abord apparaissent les questions de classification puis celles des substitutions automorphes construites à partir de la périodicité de certaines fractions continues. Les formes réduites ont différents caractères et, par suite, des *genres* divers dont la notion s'assimile aisément grâce à de nombreux exemples numériques encore fort adroitement développés.

La « Factorisation » constitue une troisième et toujours troublante partie. Faut-il rappeler que cette décomposition en facteurs, que de jeunes enfants font aisément sur des nombres peu élevés, ne relève cependant, quant aux grands nombres, que de résultats plus ingénieux que méthodiques. Toutefois, l'ingéniosité et l'ardeur au calcul de M. Kraitchik équivalent à bien des méthodes. Il rappelle d'abord le rôle des résidus quadratiques, puis examine les preuves directes de primalité dont un théorème bien connu de Fermat est le prototype.

Ici, tout de suite, nous tombons sur des exemples obsédants tels que les nombres

$$2^{128} + 1 \quad \text{et} \quad 2^{256} + 1$$

que l'on sait être composés mais dont on ne connaît pas les facteurs.

Les « séries de Lucas » permettent des résultats à la Fermat bâtis sur des irrationnelles quadratiques. M. Kraitchik a appliqué de telles méthodes au nombre

$$2^{257} - 1$$

qu'il croit être composé mais toujours sans connaissance de la décomposition.

Nous retrouvons ensuite l'analyse indéterminée du second degré dans ses rapports avec la factorisation. La place nous manque absolument pour analyser cette partie si originale et si « calculée » de l'œuvre. Certains tableaux numériques ont dû coûter un travail fou. L'idée fondamentale est la factorisation de formes quadratiques. Signalons encore les *cycles* de congruences, où celles-ci ont des coefficients à produit carré et le *criblage* d'ensembles d'entiers.

Une note sur les arithmotriangles rectangles termine ces pages où tant de résultats numériques appuient et éclairent la théorie. Dans un court avantpropos, l'auteur déclare qu'il n'a épargné ni son travail ni son temps; ceux qui l'étudieront s'initieront à une belle branche des Mathématiques en s'épargnant bien des efforts que M. Kraitchik aura faits pour eux.

A. Buhl (Toulouse).

M. Kraitchik. — **Le Probléme des Reines.** Deuxième partie. — Un fascicule gr. in-8° de 54 pages. Prix: 15 francs. « L'Echiquier ». Bruxelles, 1926.

Voici bien encore le talent de M. Kraitchik ! Comme nous l'avons dit précédemment (p. 152), le savant arithméticien, dans un premier fascicule, a traité du Problème des Reines dans un style, d'abord complaisant, pouvant plaire aux géomètres sans trop effaroucher les simples amateurs d'échecs. Mais, disions-nous, « le mathématicien domine certainement le joueur » et nous ne nous trompions pas. La question revient maintenant considérablement élargie et perfectionnée, à tel point qu'elle paraît se ranger parmi les problèmes de premier plan de l'arithmogéométrie. Elle dépend de permutations dont on peut faire une théorie précise, mais qui sont loin de donner toutes une véritable solution, d'où l'élaboration d'un choix qui est vraiment la partie difficile, la difficulté augmentant d'ailleurs très rapidement avec n sur l'échiquier de n^2 cases. Ici encore les tableaux numériques abondent, les échiquiers joliment typographiés aussi. Sur l'échiquier de 25 cases le problème est en relation simple avec la possibilité de disposer, sur ces 25 mêmes cases, 25 jetons de 5 aspects et de 5 couleurs différentes sans que, dans une même rangée, on puisse trouver deux fois le même aspect ou la même couleur. Plus loin nous trouvons un échiquier, d'ordre $n=11$, garni d'une manière analogue. On voit le rapport avec les 36 officiers d'Euler. Et non seulement tout cela a un air très eulérien mais nous trouvons, mêlés à la bibliographie, les noms de mathématiciens modernes tels ceux de MM. Hurwitz et Polya. Les *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* de W. Ahrens (Cf. *L'Ens. math.*, t. XIII, 1911, p. 71) sont souvent cités. Bref, de tous côtés, nous sommes en excellent terrain mathématique, la fécondité de celui-ci pouvant d'autant moins faire de doute que le sympathique auteur nous promet un troisième et peut-être un quatrième mémoire.

A. Buhl (Toulouse).

N.-N. Saltykow. — **Nouvelles leçons sur la Théorie des Equations aux dérivées partielles.** — Un volume in-4° de IV-214 pages, lithographié. Belgrade, 1926.

Ceci est une introduction naturelle au grand ouvrage de langue française que nous avons récemment mentionné (p. 138). Celui-ci, rédigé par le Cercle des étudiants en Mathématiques de l'Université de Belgrade et dans la langue du pays, a un caractère plus élémentaire qu'on saisira d'ailleurs en toute langue tant les formules, lisibles pour tout le monde, s'échaffaudent avec aisance à partir des équations les plus simples en x, y, z, p, q.

Un premier chapitre, conforme aux idées d'Euler et de D'Alembert, conduit à la liste des équations intégrées dans le troisième volume des *Institutiones Calculi integralis*. C'est là une riche moisson d'exercices.

Le second chapitre traite des équations à formes particulières ou ne contenant pas toutes les quantités x, y, z, p, q. De nombreux exemples sont encore traités avec extensions aux cas en x_i, p_i.

C'est seulement lorsque l'étudiant est familiarisé avec ces cas simples que l'auteur aborde l'existence des intégrales (Ch. III). On passe ensuite aux équations aux différentielles totales (Ch. IV), puis aux équations linéaires à un nombre quelconque de variables (Ch. V) et enfin (Ch. VI) aux systèmes d'équations linéaires.

Les Chapitres VII et VIII font une théorie générale modernisée, d'abord analytique, ensuite géométrique, des équations $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Le Chapitre IX a trait à la théorie de Jacobi pour les équations en x_i, p_i, z,

En X est l'étude spéciale des équations canoniques, en XI la méthode des caractéristiques. En XII, il s'agit de systèmes d'équations. Ces derniers chapitres font d'élégantes applications du Théorème de Poisson.

Insistons encore sur la riche moisson d'exercices faite par l'auteur. Il y en a partout. Aussi, cette nouvelle publication est-elle un excellent instrument de travail, préparant admirablement aux Conférences de Belgique, dont nous rappelons encore, avec empressement, toute la science et toute la valeur.

A. Buhl (Toulouse).

Ch. Michel. — **Compléments de Géométrie moderne,** à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats à la Licence et à l'Agrégation. — Un volume in-8° de 320 pages avec nombreuses figures. Prix: 35 francs. Vuibert, Paris, 1926.

Ces Compléments partent de la notion de rapport anharmonique presque admise au titre de concept fondamental, comme les notions de droite ou d'angle euclidiens. D'ailleurs, nous trouvons, dès les premières pages, l'angle ordinaire défini par le logarithme du rapport anharmonique appartenant aux côtés de l'angle et aux deux droites isotropes passant par le sommet. C'est la lumineuse ouverture sur la géométrie de Cayley, sur le théorème de Chasles relatif aux coniques dans ses rapports avec la géométrie du cercle, sur... une foule de choses qui font bon ménage avec le Postulatum d'Euclide tout en montrant qu'elles peuvent s'en libérer. La géométrie moderne est une union libre avec les postulats et non un asservissement à ceux-ci. Les triangles conjugués par rapport aux coniques, les faisceaux ponctuels et tangentiels formés par celles-ci sont à rapprocher de tels débuts. Les polaires d'un point M par rapport aux coniques d'un faisceau concourent en M'; c'est là l'origine de la *transformation quadratique* de M en M'. Cette transformation change une droite en une conique, une conique en une quartique avec des cas de dégénérescences cubiques et nous voici dans le domaine des courbes algébriques qui, même limité au quatrième ordre, offre de prodigieuses variétés. L'inversion est une transformation quadratique particulière. Ce qui s'applique aux courbes du quatrième ordre s'applique, par dualité, à celles de la quatrième classe et nous mène, par exemple, aux développées de coniques. Tout cela est facile à dire. C'est également très facile à étudier dans le livre de M. Ch. Michel, qui énonce et suggère les théorèmes les plus variés à l'appui des raisonnements exposés dans les grandes et simples voies.

Dans le Chapitre consacré aux propriétés métriques des coniques (théorèmes de Carnot, de Newton, de Mac-Laurin, etc.), notons la notion d'*indice* d'un point par rapport à une conique quelconque, notion qui, dans le cas du cercle, devient celle de *puissance*. Dans l'étude des cubiques, il faut signaler de très intéressantes propositions *purement géométriques* sur trois points de la courbe situés en ligne droite, sur six points appartenant à une même conique, etc. Ces propositions ont un aspect simple dans la théorie des fonctions elliptiques suivant Weierstrass; or ici la simplicité est absolument conservée sur le terrain synthétique élémentaire.

Nous ne sommes qu'à la moitié du livre. Il nous faut, à regret, être plus bref pour la suite.

La théorie des cônes du second ordre correspond aisément à celle des coniques. Les involutions binaire, ternaire, quaternaire sont rapprochées de manière intime; les indices reviennent alors en de curieuses propositions où interviennent des aires triangulaires ou des volumes tétraédraux. Avec les faisceaux ponctuels et tangentiels de quadriques nous étudions les *complexes tétraédraux* issus immédiatement de l'intersection d'une droite avec un tétraèdre et de la constance imposée au rapport anharmonique des quatre points ainsi déterminés. Des *cônes de Chasles* naissent de ces complexes et font comprendre l'utilité du chapitre relatif aux cônes.

Les *réseaux* de quadriques $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, qu'il ne faut pas confondre avec les *faisceaux* ($\lambda_3 = 0$), sont, on le voit, commodes à définir analytiquement. Il n'en est que plus curieux de passer ensuite à une étude purement synthétique.

Après les tétraèdres conjugués, inscrits ou circonscrits à deux quadriques, nous arrivons aux cubiques gauches. Le rapport anharmonique prend ici une importance de tout premier ordre. La théorie des fonctions elliptiques se trouve aussi paraphrasée à nouveau; peut-être faut-il regretter un peu que l'auteur ne se soit pas attaché à faire ressortir le parallélisme, ce à quoi il pourrait répondre qu'il aurait fallu des préliminaires et un appareil analytique peu en rapport avec le titre de l'ouvrage. C'est plutôt l'auteur des présentes lignes qui croit bien faire en signalant tout l'intérêt que peut présenter cet ouvrage non seulement pour les géomètres extrapurs, mais aussi pour ceux qui sont férus de fonctions elliptiques.

Et les surfaces de Steiner, avec leur asymptotiques unicursales du quatrième ordre ! Et les surfaces réglées du troisième ! Et le conoïde de Plücker ! Et les surfaces de Cayley ! Que d'admirables choses, étroitement liées d'ailleurs. A une époque où la Science se réclame surtout de considérations esthétiques, le livre de M. Charles Michel ne peut paraître qu'admirablement bien venu.

A. BUHL (Toulouse).

M. PASCH u. M. DEHN. — **Vorlesungen über neuere Geometrie.** (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XXIII) 2te Auflage. — 1 Vol. in-8 de 275 p. et 115 figures; RM. 16,50; Julius Springer, Berlin.

La première partie de cet ouvrage comprend une deuxième édition revue et complétée des leçons de Géométrie moderne professée par M. Pasch à l'Université de Giessen.

Dans la seconde partie M. Dehn expose les fondements de la Géométrie dans leur développement historique, en tenant compte des recherches les plus récentes. Après un chapitre consacré au postulat des parallèles, il examine les fondements de la Géométrie moderne, la notion de continuité et la Géométrie non archimédienne. Puis viennent les systèmes de postulats et la notion d'aire avec les postulats qui s'y rattachent.

Ce nouveau volume de la Collection Springer constitue un excellent guide pour tous ceux qui désirent aborder l'étude des travaux modernes sur les fondements de la Géométrie.

H. F.

H. Dingler. — **Der Zusammenbruch der Wissenschaft und des Primat der Philosophie.** — 1 vol. gr. in-8° de 400 p.; 13 M.; Verlag Reinhardt, Munich.

Ce livre de M. Dingler traite de l'effondrement de la science et de la suprématie de la philosophie; nous le recommandons vivement à nos lecteurs. Ils y trouveront des idées frappantes et qui donnent à réfléchir. L'auteur est convaincu de ce qu'il écrit, il le présente avec clarté et d'une manière saisissante. Il possède une base solide, caractérisée par des connaissances étendues sur la littérature de son sujet et par de nombreux travaux personnels sur les fondements des mathématiques et de la physique.

Quoique le titre suggère une œuvre destructive, le but principal du livre est plutôt constructif. Le sujet du premier chapitre est, il est vrai *l'effondrement de la science dans les temps anciens* et, dans un second, intitulé « *Le nouvel effondrement* », l'auteur nous parle surtout de la physique moderne; il en trace d'abord l'origine et le développement, puis les liens avec les mathématiques et la logique, et enfin l'état actuel de la philosophie de cette science, qu'il caractérise comme chaotique. Dans les six chapitres suivants par contre l'auteur cherche à reconstruire une philosophie unique, qui serait à la base de toutes les branches de la science et qui consoliderait ainsi l'édifice scientifique.

Le point de départ de toute philosophie est, dit-il, une décision, un acte de libre arbitre humain, que l'auteur pose en contraste avec les expériences. M. Dingler ne se contente pas de faire cette constatation, il la motive d'une part en faisant la critique de ces savants qui prétendent « mettre l'oreille à la nature » pour saisir les principes qui peuvent subsister dans la théorie, et, d'autre part, en nous éclaircissant sur les méthodes de recherche poursuivies par des physiciens tels que Galilée et Newton.

Notre auteur mérite bien d'être étudié, même si l'on ne partage pas toujours ses opinions, ne serait-ce même que pour la franchise courageuse de sa critique où il attaque ceux qui dorment sur l'Olympe des mathématiciens. En particulier les adhérents d'Einstein ne doivent pas préjuger l'œuvre par le fait que M. Dingler est un partisan opiniâtre de la théorie euclidienne et newtonienne. Les remarques et les critiques de M. Dingler sont au-dessus de toute prédilection personnelle. Son étude sur la définition et la réalisation d'un corps rigide a besoin d'être approfondie au point de vue de la géométrie non-euclidienne et de la physique de notre siècle. M. Dingler constate avec justesse que nous dépendons dans la pratique essentiellement de la précision de nos instruments, dont la construction dépend de calculs faits sur la base de la géométrie d'Euclide et de la loi de gravitation de Newton. Il prétend que cet emploi — par exemple, pour vérifier la théorie de la relativité — introduirait un cercle vicieux dans nos raisonnements; nous aimerions voir un examen détaillé de ce thème intéressant. M. Dingler ne l'a pas encore donné dans son extension complète. En effet, non seulement il ne nous a présenté ni la théorie non-euclidienne du corps rigide idéal ni une discussion des corps réels acceptés provisoirement comme rigides (bois, verre, acier, cuivre, quarz, platine, platine iridié, etc.), mais il doit nous fournir aussi des chiffres permettant de contrôler en quelque mesure les calculs d'après lesquels ces corps ont été successivement employés, par exemple dans la construction des poids et mesures, et successivement rejetés du rang de *corps rigides autogènes*, selon l'expression employée par M. Dingler. Sans un examen consciencieux de tels détails il est impossible de juger jusqu'à quel point ces calculs dépendent de formules qui ne sont plus exactes dans la géométrie non-euclidienne ou dans la physique non-newtonienne. Ici, il ne faut pas oublier qu'une grande partie des théorèmes d'Euclide ne dépendent pas de l'axiome des parallèles. D'autre part des circonstances spéciales, telle la symétrie des constructions, pourraient justifier l'emploi de ces formules. Enfin ne peut-on pas supposer encore que, même si les calculs se font avec la géométrie non-euclidienne, l'emploi de nos instruments de précision actuels n'entraîne toutefois pas de nouvelles limites d'erreurs, les nouvelles erreurs n'excédant pas les limites envisagées précédemment, vu que, comme s'exprimait Klein, *im Kleinen ist jede Geometrie euklidisch.*

L'argument que M. Dingler croit décisif en faveur de l'adoption de son système préféré aura beaucoup d'attrait pour le practicien, c'est la théorie *du système le plus simple.* L'idée n'est pas nouvelle, et M. Dingler cite à cet effet Mach, Klein, Galilée et d'autres encore. Ces auteurs ont employé ce principe dans des cas isolés, plus ou moins tacitement, mais au dire de M. Dingler on peut toujours trouver un tel système dans les cas qui se présentent actuellement, un système uniquement défini par le nombre minimum de ses hypothèses. C'est un argument rappelant le célèbre principe de Dirichlet, il demande, comme celui-ci, une apologie plus approfondie que celle qu'il a reçue, quoique M. Dingler en ait fait le sujet d'un mémoire spécial.

Ajoutons une liste des chapitres:

1. L'effondrement de l'ancienne philosophie. — 2. Le nouvel effondrement. — 3. Le point de vue du système. — 4. La théorie de l'ontologie. — 5. Le problème de l'histoire. — 6. Le miraculeux. — 7. L'empire de la valeur (métaphysique, éthique et théologique). — 8. Conclusion.

Grace Chisholm Young (Lausanne).

C. Walmsley. — **An introductory Course of mathematical Analysis.** Avec une préface de W. H. Young. — 1 vol. in-8, x-293 pages; 15 s.; Cambridge University Press, 1926.

Ce livre reproduit les leçons faites par l'auteur aux étudiants de première année de l'Université du Pays de Galles à l'époque où M. W. H. Young s'efforçait d'y réorganiser l'enseignement des mathématiques. Le cours d'analyse de première année, qui s'adresse à des étudiants provenant directement de l'enseignement moyen et dont une partie seulement poursuivra l'étude des mathématiques, peut être conçu de diverses manières. Conformément aux directives de M. Young, M. Walmsley donne une exposition rigoureuse des premiers éléments de l'analyse. Cette façon de faire semble plus propre à éveiller les vocations mathématiques que celle qui consiste à donner surtout en première année des modes pratiques de calcul sans insister sur les questions de principe. Elle nécessite toutefois que les étudiants aient l'esprit assez mûr et demande à être pratiquée avec ménagements pour ne pas rebuter dès l'abord des élèves encore peu habitués au raisonnement mathématique. C'est ce qu'a fort bien compris l'auteur qui n'introduit les notions et théories générales qu'après les avoir étudiées sur des exemples appropriés.

L'ouvrage de M. Walmsley est divisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre l'auteur expose les extensions de la notion de nombre (nombre fractionnaire, nombre irrationnel), donne la formule du binome et les inégalités algébriques fondamentales, introduit très judicieusement les suites infinies à propos de l'approximation des irrationnels en insistant particulièrement sur les suites monotones, et après avoir défini et calculé le nombre e passe aux séries infinies. Il conviendrait peut-être d'insister ici, plus que ne le fait l'auteur, sur ce que l'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle d'une série.

Le second chapitre est consacré à l'étude des fonctions exponentielle et logarithmique. L'auteur introduit les exposants négatifs et fractionnaires, puis l'exposant incommensurable et passe à la définition et aux propriétés du logarithme. La fonction logarithmique fournit un premier exemple de fonction monotone dérivable. L'auteur montre que les fonctions dérivables à dérivée positive sont croissantes, ce qui conduit par intégration à la série logarithmique. La série exponentielle est obtenue comme limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Le chapitre III débute par une étude approfondie de la fonction x^2; à ce sujet l'auteur introduit les notions générales de monotonie, continuité, dérivabilité et intégrabilité (aire de la courbe). Toutefois, M. Walmsley laisse de côté la notion de convexité qui joue cependant un rôle important en analyse et en mécanique. L'auteur applique ensuite les notions acquises à l'étude des fonctions rationnelles et des fonctions définies par les séries entières, mais sans insister sur la notion d'intervalle de convergence. L'étude des fonctions trigonométriques définies à partir des développements en série bien connus qui permettent de démontrer les propriétés d'addition et de périodicité, puis celle des fonctions hyperboliques, terminent le chapitre.

Après avoir ainsi étudié en détail les fonctions les plus importantes de l'analyse élémentaire, l'auteur donne dans le chapitre IV les éléments de la théorie générale; notion générale de limite et application (longueur d'un arc de courbe, aire, etc.); théorèmes sur les limites et sur les fonctions dérivables, sur les fonctions de fonctions et les fonctions inverses; définition et propriété de l'intégrale de Riemann, procédés d'intégration et applications. Il montre enfin l'identité des fonctions trigonométriques définies au chapitre III et de celles définies géométriquement.

Dans un court appendice, M. Walmsley donne la définition et les propriétés des nombres complexes.

On voit dans quel esprit est écrit ce livre qui se distingue nettement des ouvrages similaires et rendra de bons services aux étudiants. Suivant l'habitude anglaise, chaque section est suivie d'énoncés d'exercices. L'exposition toujours claire et concise et la présentation matérielle impeccable augmentent encore l'intérêt de ce livre et contribueront aussi à son succès.

G. VALIRON (Strasbourg).

F. KLEIN. — **Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XXIV.) — 1 vol. in-8° de 385 p.; M.21; Verlag Julius Springer, Berlin.

Pendant les dernières années de sa carrière universitaire, F. Klein a fait à l'Université de Goettingue une série de cours sur le développement des mathématiques au XIX^e siècle. Ce sont ces leçons qui font l'objet de cet ouvrage dont le premier volume vient d'être publié par les soins de MM. Courant et Neugebauer.

Pour entreprendre un travail de cette envergure, il faut, comme c'est le cas pour le savant géomètre de Goettingue, avoir contribué d'une manière active au progrès de la science et dominer avec une égale maîtrise les différents domaines des mathématiques. Klein possèdait un don tout particulier pour faire ressortir les liens intérieurs entre les différentes branches des sciences mathématiques et physiques. On le constate de nouveau à la lecture de ce livre que nous signalons à l'attention des mathématiciens et des physiciens.

Ce premier volume débute par un chapitre sur Gauss. L'auteur rappelle ensuite le rôle des mathématiciens français du début du XIX^{e} siècle, puis il passe à l'Allemagne qu'il prend à la fondation du journal de Crelle (1826) et dont il signale les grands géomètres. Dans les chapitres suivants, il examine successivement le développement de la géométrie algébrique, de la mécanique, de la physique mathématique et de la théorie des fonctions. L'ouvrage se termine par la théorie des groupes et la théorie des fonctions automorphes auxquelles il a lui-même apporté de remarquables contributions.

Le second volume donnera un aperçu historique du développement de la théorie des invariants et de la théorie de la relativité. H. F.

Mathematisch-physikalische Bibliothek. Herausgegeben von W. LIETZMANN u. A. WITTING. — Petits volumes in-16°, d'environ 50 pages, cartonnés, M. 1,20 le volume; B. G. Teubner, Leipzig.

W. KRAMER. — **Einführung in die darstellende Geometrie,** I. Teil (avec 71 figures).

A. HERRMANN. — **Das Delische Problem.** Die Verdoppelung des Würfels (avec 32 figures).

L. BALSER. — **Sphärische Trigonometrie, Kugelgeometrie** in konstruktiver Behandlung (avec 22 fig.).

Cette remarquable collection vient de s'enrichir de trois petits volumes. Bien que s'adressant aux élèves des écoles moyennes et aux étudiants en sciences mathématiques, ces monographies peuvent aussi rendre service à tous ceux qui enseignent les mathématiques élémentaires. Ils y trouveront d'intéressantes remarques dont ils pourront faire bénéficier l'enseignement.

L'ouvrage de M. Kramer donne une introduction à la géométrie descriptive. Le premier volume comprend les notions relatives à la projection orthogonale.

M. Herrmann montre comment on peut aborder avec de jeunes élèves le problème de la duplication du cube et les initier aux conditions concernant les constructions à l'aide de la règle et du compas et à la notion de domaines de rationalité.

M. Balser prépare le lecteur à l'étude de la géométrie de la sphère et de la trigonométrie sphérique en procédant par voie constructive. Il contribue par là à développer chez les élèves la conception de l'espace. H. F.